

北京高校第八届青年教师教学基本功比赛教案

教案主题：平面四连杆机构设计的 **Burmester** 理论

比赛类别：工科

比赛组别：A

选手姓名：赵景山

北京高校第八届青年教师教学基本功比赛教案

平面四连杆机构设计的 Burmester 理论

(Burmester's Theory for the Design of Planar Four-bar Linkage)

课程名称：机械原理

课程类型：本科生专业基础课

授课对象：机械类二、三年级本科生

2013.4

一. 课程一般信息

【课程名称】

中文：机械原理

英文： Mechanism and Machine Theory

【课程类型】

本科生专业基础课；机械学院平台课

【教学对象】

机械类相关专业 二、三年级 本科生

【课程简介】

《机械原理》是机械类相关专业的专业基础课，为后续课程提供理论基础。作为机械类本科生平台课，本课程面向机械工程、仪器科学与技术、汽车工程、航空航天、热能工程、工业工程等专业的学生开设。课程主要讲授机械设计的基本原理、物理模型、分析方法和系统结构，阐明平面连杆机构、凸轮机构、齿轮机构、轮系及间歇运动机构等构成机械的各类基本机构的组成、运动、分析和设计的基本理论；从而为学生进一步深入学习各类专业知识，如一般机械设计、机床设计、汽车设计、飞行器设计、动力机械设计以及各类工程设计提供核心理论和知识基础，并为从事机械产品的设计、开发、评估和优化打下坚实的理论基础。

【课程内容】

主要教学内容：

1. 机构的运动设计：机构的组成与结构；连杆机构；凸轮机构；齿轮机构；轮系；间歇运动机构；组合机构。
2. 机械的动力学设计：机械系统动力学；机械的平衡设计。
3. 机械系统方案设计：机械总体方案的拟定，机械执行系统的方案设计，机械传动系统的方案设计和原动机选择。

【教学目标】

本课程主要培养学生机械系统方案设计能力，使学生深入理解和熟练掌握机械系统设计的基础理论、数学模型、分析方法和设计思路。以机构的运动设计、机械的动力学设计和机械系统方案设计为载体，培养学生机械系统方案创新设计的思维、方法和自主学习的能力，具备根据具体的工程需要设计机械系统的初步能力，了解典型机械系统设计的基本思想和实现方法，从而达到提高学生的综合设计能力、创新设计能力和工程实践能力的目的。

【教材与参考书】

教材：

1. 申永胜主编.《机械原理教程》（第2版），清华大学出版社，2005.
2. 申永胜主编.《机械原理辅导与习题》（第2版），清华大学出版社，2006.

参考书:

1. Robert L. Norton, Design of Machinery——An Introduction to the Synthesis and Analysis of Mechanisms and Machines, New York: McGraw-Hill Book Company, 2004.
2. Hamilton H. Mahie, Charles F. Reiholtz, Mechanisms and Dynamics of Machinery, New York: John Wiley & Sons, 1987.
3. Joseph Edward Shigley, John Joseph Ucker, Theory of Machines and Mechanisms, New York: McGraw-Hill Book Company, 1980.

【前导课与后续课】

本课程的主要前导课为《机械制图》和《理论力学》，后续课程为机械类学生的专业基础课《机械设计》以及设计与制造方向的专业课。

与本课程配套的实验课《机械原理实验课》同期进行，后继学期还有隶属于本课程和《机械设计》的配套实践课《机械设计基础综合训练》可供机械类和近机类不同专业的学生进一步选修，加深学生对于完整机械系统的设计实践与认知。

二. 单元教学一般信息与目标

【教学任务】

在45分钟内讲授“第二章 连杆机构”中的2.5节“平面连杆机构的运动设计”。(其中20分钟参赛演示内容为“平面四连杆机构设计的 Burmester (布尔梅斯特) 理论”)

【教学目标】

1. 知识层面
 - 了解运动设计的数学表达式及其参量的物理意义；
 - 了解刚体导引机构设计、函数生成机构设计和轨迹生成机构设计的不同；
 - 掌握典型刚体导引机构设计、函数生成机构设计和轨迹生成机构设计的图解法和解析法；
 - 掌握急回机构设计的理论和方法；
 - 掌握 Burmester 理论，能够实现给定多位置要求的四连杆机构的解析设计。
2. 能力层面
 - 会运用“刚化反转法”进行3位置刚体导引机构的几何图解设计；
 - 会根据急回要求实现满足“行程速比系数”的机构的几何图解设计；
 - 会根据 Burmester 理论完成4、5位置及更多位置要求的机构解析设计。
3. 思维层面
 - 从机械工程的具体需要认识机械设计的基本方法；
 - 从机构2位置和3位置设计的几何图解法及多位置设计的解析法学习和理解“Burmester 理论”的工程需要及应用背景；
 - 从系统完善的角度探索 Burmester 理论推导和数学表述的完整性；

- 从充分必要性的角度思考 Burmester 理论统一公式在平面连杆机构创新设计中的重要理论意义。

三. 单元教学重点

在前面章节，参赛教师已经为学生建立起机构设计的概念，包括刚体导引机构设计、函数生成机构设计和轨迹生成机构设计。讲授了平面四连杆机构急回机构设计的理论和方法，根据急回要求实现满足“行程速比系数”的机构的几何图解设计，同时讲授了“刚化反转法”在求解刚体导引和函数生成机构中的应用。

本节的教学重点是，如何实现平面四连杆机构给定连杆位置的运动设计。具体到本教案的 45 分钟教学，其教学重点集中在，平面四连杆机构两位置和三位置设计的几何图解法，四位置设计的 Burmester 理论及其在五位置和更多位置设计中的统一设计公式推导与证明。

首先，结合平面四连杆机构模型复习前面学习的内容；接着通过一段视频，介绍平面四连杆机构在人们生产生活的各个方面都得到了广泛的应用；然后，引导学生思考“在给定连杆若干位置的情况下如何设计平面四连杆机构？”这一问题。

通过展示人们生活中常见的大巴车外摆式车门开闭机构的录像，介绍二位置设计具有无穷解，因而允许多种设计。接着通过机器人下肢步态生成机构引出一般三位置设计。在得到一般三位置设计具有“唯一解”的情况下，引出“四连杆机构多位置设计”的客观需要。结合一个新闻短片，介绍美国于 2012 年发射的一颗地球水文探测卫星，要求在两天内完成从北极到南极覆盖地球 99% 表面的海洋、土壤的周期性探索工作。最后将重点引导到这节课的主要内容上——平面四连杆机构设计的 Burmester 理论。教学重点可做如下分解：

1. 平面四连杆机构 2、3 位置设计的几何图解法

平面四连杆机构是最简单的连杆机构，也是组成复杂空间机构的基本结构。平面四连杆机构的设计是机构学基础理论的重要内容，也是深入学习空间复杂机构设计的基础。四连杆机构既可以实现刚体导引和轨迹生成，又可以满足特殊函数关系的要求，在工程实践中得到了广泛的应用。多位置设计是平面四连杆机构设计中的重要基础理论。1888 年，德国数学家与机构运动学家 Burmester 系统阐述了平面四连杆机构 4 位置设计的几何图解法，成为现代机构学的重要基础理论之一。

在该知识点的教学中，需要结合具体的康复机器人下肢机构来引出平面四连杆机构运动设计的重要性，引导学生思考在给定连杆 3 个位置的情况下，如何设计平面四连杆机构。由于连杆是通过两个连架杆与固定机架以转动副连接，因此，连杆的两端在运动过程中为两段圆弧。于是问题转化为：已知运动轨迹上的 3 个点，如何找到其转动中心？然后，引导学生想到通过作两个线段的垂直平分线的方式来求解。在找到唯一解的情况下，提出“难道平面四连杆机构最多只能精确实现 3 位置的运动跟踪？”的问题。通过新闻短片中星载探测器至少要实现 5 位置的运动要求，进一步追问学生：“四连杆机构是否可以实现多于 3 位置的运动跟踪呢？”进一步通过 4 位置设计例子，来加深学生对这个问题的思考。在学生一筹莫展、百思不得其解之时，适时启发他们克服定向思维的局限，不要把给定的位置点就直观理解为较

链点：引导学生通过“**连杆扩展平面**”的概念扩大铰链点的选择范围。自然引入 4 位置设计的解析分析法。

2. 平面四连杆机构 4 位置设计的解析法

启发学生通过设立坐标系、建立解析方程的方法来解决 4 位置设计问题。在建立完方程，推导出解析表达式之后，再次将 3 位置综合的几何图解法与解析理论对比，来回答前面提出的“难道平面四连杆机构最多只能精确实现 3 位置的运动跟踪？”的问题。通过解析解来阐明几何图解法所获得的“**唯一解**”是指“**给定位置的铰链点与固定铰链点的‘映射关系’是唯一的！**”。通过解析法和图解法的对比，加深学生对多位置运动设计本质的认识。在这一部分，重点介绍平面四连杆机构 4 位置解析设计理论的数学本质。这部分教学需要突出几何图解法和解析法相得益彰的互补性和统一数学描述的科学规范性，阐明工程设计理论背后蕴含的数学之美。

3. Burmester 理论在 5 位置及更多位置设计的统一公式推导与充分必要性证明

在 4 位置设计的基础上，进一步引导学生思考建立 5 位置及更多位置设计的统一公式表述的可能。还应当说明建立统一数学公式对于经典理论表述的必要性。激发学生对研究型学习的兴趣，引导学生掌握科学研究的一般方法和思路。

此外，本部分教学中将从 Burmester 理论统一数学公式系统性和完善性角度，阐明科学研究的基本思路，如何在现有经典理论的基础上向前推进研究，进而阐述工程科学的数学之美，激发学生从事科学研究的积极性。

四. 学生特点分析与教学难点

参赛教师所教的学生往往从中学就受到了严谨的理科思维训练，养成了严密的逻辑思维习惯并打下了较好的数理基础。在大学一、二年级的学习中他们已接受了本课程所需要的数学训练，初步掌握了坐标变换、线性方程组相容的理论基础。现就学生的典型特点分析如下：

1. 好奇心强、求知欲高

现在的青年学生具有非常好的基础，对未知领域充满了好奇和求知欲。任何问题他们都不只是满足于“知其然”，而更渴望了解“所以然”；很多情况下都表现出具有强烈“**逆反**”特色的“**如果不这样做会怎样？**”的打破沙锅问到底的求知欲。

在教学中参赛教师特别注重学生的这一优点。对于经典理论，通过采用启发式教学方法，设置可以引导他们深入思考的问题，一方面激发他们的求知欲，另一方面引领他们自己推导或总结出所要讲授的理论和方法。如讲授 Grasshoff 定理时，在引导大家观察整周转动的曲柄需要到达的两个极限位置后，提出“平面四连杆机构具有整周转动副所要满足的几何条件是什么？”的问题。这样，学生就集中精力去寻找整周转动副所连构件从与机架重合开始，转动 180 度前后形成的两个三角形成立的条件。他们可以很快找到整周副以及曲柄存在的条件。这样通过学生自己总结出结论要比教师单纯讲授的效果好得多。在学生总结出 Grasshoff 定理的基本条件后，再次提出“在保持各连杆的尺寸条件不变的条件下，改变机架的位置会有什么不同结果？”的问题。通过多位学生的总结，完全可以重现历史上 Grasshoff 给出的系统结论。上述的“启发式”讲授贯穿于参赛教师的整个教学实践，既满足了学生的求知欲，

也增加了他们参与的机会，活跃了课堂气氛，使理论课程的学习变得相对轻松许多，提高了课堂学习效率。

2. 数理基础坚实但综合运用能力尚需进一步培养

参赛教师的授课对象，绝大多数已在先修课程中打下了较为扎实的基础，尤其具有良好的数理知识。当讲授内容的处理工具明确隶属于某门先修课程时，学生可以很快地回忆起来，并能够用于《机械原理》的理论分析。因此，参赛教师对于此类情况，注重建立在严格数学推导上的逻辑演绎。这不仅符合学生的思维特点，同时有助于学生抓住复杂机构分析与综合背后的科学本质，以及各章节间的内在联系。参赛教师还结合自身的科研经历，介绍一些科研前沿和工程实践中的热点问题，引导学生在清晰的理论框架下进一步深入探讨机械设计基础问题。不仅满足了学生对于本专业学科前沿的好奇心，还使学生认识到，将《机械原理》落实到工程系统中还需要大量的实践，激发学生学习工程性后续课程的兴趣。同时，学生具有较好的数学基础，能够很快地接受和理解课堂上的严密推导。

然而，《机械原理》教与学的一大难点是如何以新颖的方式，综合运用各种数学工具和分析手段。其根本原因是，机械系统涉及到机构的分析与设计，运动与传力性能的综合评价；同时，还常常遇到有多解甚至无穷解的情况。这使得学生常常陷入“无从下手”，或者“摸不着规律”的困境。参赛教师在相关教学内容的处理上充分考虑到学生的认知规律。具体做法为：

在机构的几何图解设计和解析设计理论的讲授中，尽量从几何图解的直观设计入手，引导学生获取图解结论的同时，启发他们建立解析方程以获得更为一般化的共性理论和方法。例如 20 分钟演示教学中，对 Burmester 理论的讲授和系统设计公式推导方法，就是从学生熟悉的巴士车门的开闭机构的设计开始，讲授 2 位置运动设计具有无穷解；然后，结合康复机器人下肢运动生成机构的 3 位置设计的几何图解法，引导学生认识到平面刚体运动的数学实质是“保距变换”。这样，很自然地引导他们通过设置所关注的未知变量，建立等式约束，进行多位置综合的一般化系统理论推导和证明，达到研究型学习的效果。

3. 具有探索科学问题的广泛兴趣

此外，在教学实践中参赛教师还尽量描述理论背后的几何直观和几何直观背后严谨的数学表达。例如 20 分钟演示教学中，在推导 Burmester 理论时，参赛教师将 3 位置综合的解析理论结果与图解法结论相对比，引导学生认识到几何图解法结论的实质是“‘给定位置的铰链点’与‘固定铰链点’的一一映射关系是‘唯一的’！”。这样起到深化学生对设计问题物理本质的理解。接着，启发学生思考“5 位置综合的理论描述”。在给同学们留有足够的思考时间后，很自然地引导他们去尝试建立完善系统的数学表达式，培养青年学生在理论学习中养成系统、严谨的习惯。同时，在充分必要性证明的过程中，参赛教师会明确点出其与先修课程的关系，以提高学生的学习效率。

五、 教学创新点与教学理念

1. 从教学与科研的结合中发现研究课题，经过教师与学生共同研究，再将研究成

果充实到教学中去。

根据给定的几个连杆位置，设计出满足运动要求的连杆机构是机构运动设计的重要任务，也是本科生《机械原理》课程教学大纲的基本要求。查阅目前的主流教材（如国家级教学名师申永胜教授主编的《机械原理教程》第二版等 93 部国内外教材，其中，具体列表分析请参阅附件 1），都是主要讨论平面四连杆机构 2 位置和 3 位置设计的几何图解法，很少涉及更多位置问题。但是，生产生活和科研中遇到的往往是 4 位置、5 位置，甚至是更多位置的设计问题。

每次讲到这部分内容时，参赛教师心里都特别纠结。如何在有限的课堂教学中把一个完整的多位置设计方法讲授给学生呢？

1888 年，德国科学家 Burmester 给出了 4 位置和 5 位置设计的几何图解法。虽然这一理论成为现在国内外本科生《机械原理》课堂教学大纲要求的基本内容，但是作法中繁多的辅助线既难理解又不易讲授。为此，图 1 给出了用几何法求解 4 位置设计的两个主要步骤中所使用的辅助线情况（图片选自李学荣教授主编的《四连杆机构综合概论》第二册，北京：机械工业出版社，1984 年 11 月）。或许，这就是国内外教材很难将这一解法引入课堂教学的主要原因。

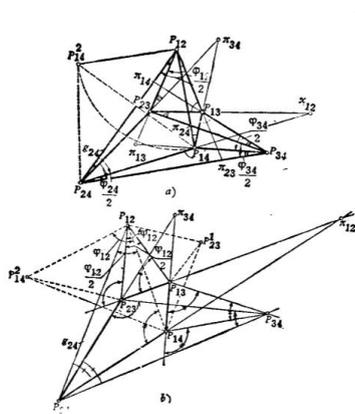


图 6.3-2 运动杆作四个有限接近位置的位移时极点的角度关系。对极四边形

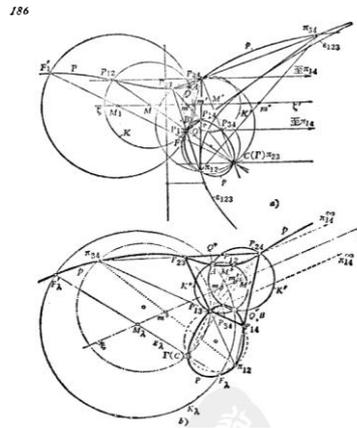


图 6.3-5 根据相切于对极四边形的抛物线性质求极位曲线

图 1 几何图解 4 位置的关键 2 步

进一步查阅国外教材（比如 R. L. Norton, Design of Machinery-An Introduction to the synthesis and Analysis of Mechanics and Machines，机械工业出版社，2003 年 2 月影印版）后发现，已有学者对该问题发展了解析方法。这类方法可以处理 4 位置问题，但在解决多位置设计时先要组合构造所有可能的 3 阶行列式方程（每一个方程对应一条 3 次曲线），然后探讨这些 3 次曲线的交点。而判断多条 3 次曲线“求交”的问题，在数学处理上非常困难，这给 Burmester 理论的工程应用带来了事实上难以逾越的障碍。

每次讲到这部分内容时，参赛教师心里都特别纠结。如何把 Burmester 理论引入课堂？如何在有限的时间内让学生系统地掌握？带着这一系列的未解之惑，参赛教师结合自己承担的“扑翼式飞行器的设计”问题，与学生一起探讨和思索并从仿生的角度入手尝试突破的可能。由于扑翼式飞行器提出了高效仿生的要求。要想模拟鸟类的扑翼飞行，驱动四连杆机构至少要满足 3 位置要求；而要想实现高效扑翼仿生，连杆所满足的位置则应越多越好。为此，我们初步提出了 12 位置的近似设计要求。但是，目前国内外的经典教材中均没有给出现成的理论和方法来完成这样的设计。

附件给出了在我校图书馆检索到的截止到 2013 年 4 月 20 日国内外《机械原理》相关教材。其中附件 1 所列的 94 部教材或著作把重点放在了 2 位置和 3 位置的几何

图解法和解析法设计，没有针对 4 位置及更多位置设计问题展开讨论；附件 2 所列的 9 部教材或著作主要通过图解法讨论了平面四连杆机构 4 位置设计的 Burmester 理论，同时也通过曲线求交的方式提及了 5 位置设计的几何图解法；附件 3 所列的 13 部教材或著作主要通过解析法探讨了平面四连杆机构 4 位置设计问题，而对于 5 位置设计则主要通过曲线求交的方式解决。具体内容的对比和分析作为附件附在本教案之后。

经过教师并发动学生共同研究（其中证明部分留给学生完成），最后从理论上提出了“四连杆机构连杆满足任意位置要求的设计解析表达和证明方法”，并将这一成果引入教学。这既满足了本科生《机械原理》中机构运动设计的大纲要求，又对学生实施了创新性教育，还满足了科研的需要。这一研究成果被《Journal of Mechanical Engineering Science》接收。同时，该成果也写入了参赛教师的最新著作《Design of Special Planar Linkages》，该书由 Springer 出版社出版，即将于 2013 年 7 月面世，封面如附件 4 所示。



教学理念 “教学中存在创新源”，是我校副校长在 2012 年 10 月 11 日全校青年教师教学大赛研讨会上提出的。它是先进的又是十分重要的教学理念。对学生实施创新教育不能仅是让学生做项目，教师从教学内容中挖掘并研究得到的新成果和新见解再充实于教学，这是实现教学创新的另一重要方面。这种研究式讲课，对研究型大学尤为重要。

2. 研究式讲课不单是展示教师的研究结果，更重要的是通过讲授研究过程引导学生独立思考进而培养他们的创新思维。

如前所述，现有文献和教材的思维方式在处理平面四连杆机构 5 位置及更多位置设计时，无法避免多条 3 次曲线“求交”的问题。而且随着位置数的增多，其难度将急剧增大。这是参赛教师要完成的统一设计研究所面临的最大困难。

参赛教师从现有解析法不得不解决 3 次曲线求交的技术障碍入手，引导学生探究导致 3 次曲线求交这一困境的根本原因，分析避免 3 次曲线求交的可行性及如何从理论上加以解决。于是思维方式就从曲线“求交”转向了方程“求解”。

接下来启发他们思索如何有效地把解决问题的方法归结于“在 $n(n \geq 5)$ 位置有解的前提下所得的 $(n-1) \times 3$ 的系数增广矩阵 C 的秩必小于 3”这一新的科学思维上来。在学生尚未找到具体的技术措施而普遍感到一筹莫展之际，引导他们观察“ $(n-1) \times 3$ 的系数增广矩阵 C 的秩必小于 3”这一客观要求，使得矩阵 C 中含有了 $(n-1) - 3 = n - 4$ 行冗余信息。这样，问题又进一步转化为如何有效压缩矩阵 C 的结

构化信息的问题。于是引导他们从这一核心目标出发，以新的思维方式思考如何有效压缩这些冗余行向量。启发学生从含冗余方程的线性方程组的求解方法中类比思考，提炼共性思路。由于学生具有较好的数学基础，引导到这里，课堂上总有学生想到伪逆定义的数学本质。进而类比推理，发现 C^T 是 $3 \times (n-1)$ 的，用 $3 \times (n-1)$ 的 C^T 左乘 $(n-1) \times 3$ 的 C 就构造了可以一次性压缩矩阵结构化信息的 3×3 的方阵 $M = C^T C$ 。通过求解方程 $|M| = 0$ ，就可以判断 n 位置设计是否有解，并在有解的情况下直接求解。这样，通过曲线“求交”到方程“求解”的思维转换，最终找到了解决问题的突破口。

在参赛教师把这个思维过程和思路告诉了自己的一个学生后，这个学生表现出极大的研究兴趣并当即表示要解决这个理论公式的充分必要性证明。当天深夜，在参赛教师关闭计算机准备休息时，手机响了，打来电话的正是该学生。电话中告诉参赛教师，他已完成了充分必要性证明。在参赛教师要求他进一步检查是否用了最简洁的数学语言完成时，他说已经发到老师的电子邮箱，并且坚信不可能有更简洁的证明方法了。于是，参赛教师重新打开了计算机。事实证明，这个学生给出的方法确实是用最简洁的数学语言完成的。这为平面四连杆机构的多位置设计提供了统一的设计公式和证明方法。另外也较理想地解决了扑翼式飞行器的四连杆驱动机构12个近似位置的设计问题。这位学生通过完成这一问题的证明，感触很深。他说“每一次失败的尝试就排除了一个不可行的证明方法，也就离成功更近了一步。研究性学习就是不断的‘失败—排除—再失败—成功’的过程。这次亲身体会到了这一富有挑战性的有趣过程，而且是特别深刻。”

教学理念 对研究式讲课，不仅教师要研究，更要发动学生共同研究。教师的教学要注意从学生中吸取改进教学的营养和动力，敏感地发现在学生中闪现的创新火花，并将其发扬光大。

3. 剖析 Burmester 经典理论的本质，明确指出在设计中必须将连杆抽象地扩大为一平面，才能引入数学上“保距变换”的概念。这不仅使学生掌握了理论知识，而且培养了洞察问题本质的抽象能力。

在进行平面四连杆机构3位置的几何图解设计时，总是先要找到机架上两个固定的铰链点，然后再把它们分别与连杆上已经明确标注的位置点相连接，就得到了一个“唯一”解，即达到了设计目的。但是，这很容易使学生形成思维定势。在进行4位置或更多位置设计时，学生也会误认为“要连接的永远是连杆上已经给定的位置点”。在这种误解下，就会得到4位置和更多位置无解的错误结论。因此需要使学生转换思维，提高抽象分析和解决问题能力。值得指出的是，无论是几何法还是解析法，都需要有一个抽象思维的过程。

例如，图2中某连杆在瞬时 t_1 ，位于 P_1Q_1 位置。具体来看，连杆是一条线段；但是，抽象地看， P_1Q_1 表示了一个无限扩展的平面。而图中仅用一个有限的封闭曲线来表示这个扩展平面。在 t_2 瞬时，连杆 P_1Q_1 运动到了 P_2Q_2 位置，这个无限扩展的平面也刚性地跟随连杆一起运动。这可以用同样的有限封闭曲线来表示。教学的关键是让学生在用眼睛看到表示连杆 PQ 的线段运动的同时，也能在大脑中“看到” PQ 所在平面的运动。机架上固定的铰链点与连杆所要连接的铰链点，未必一定是连杆上的位置点，往往位于扩展的平面上。这就是一个从“具体”到“抽象”的科学思维过程。

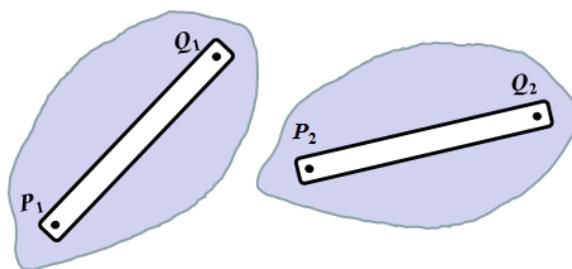


图 2 连杆及其扩展平面的运动

在讲授平面四连杆机构连杆的 4 位置设计时，参赛教师首先假设在各给定连杆位置处的扩展平面上找到了与机架相连的铰链点。然后启发学生思考在连杆依次经过这些位置时，对应的扩展平面上的铰链点应该与机架上的固定铰链点保持距离不变，其物理本质就是数学上的“保距变换”概念。通过学生的广泛讨论，总结出其实是“在扩展的连杆平面上搜索与机架固定铰链点的距离保持不变的点”。这样，“平面四连杆机构的位置设计”就转换为“在扩展的连杆平面上如何求解满足连杆‘保距变换’的点”的问题。

这需要联立各位置的保距变换关系进行求解。由于现在大学生的数学基础普遍很好，引导到这里，他们就可以自己总结出无论是“几何图解法”还是“解析法”，其实质都是“保距变换”。而理论公式的证明将是水到渠成。

通过上述过程，参赛教师将学生思维方式从“定势思维”转换到抽象化的“连杆扩展平面”上，这不仅使学生跨越了理解抽象理论的门槛，而且在教学上解决了国内外均列入本科生《机械原理》中“机构运动设计”教学大纲，但又很难讲授的系统理论问题。

教学理念 抽象是认识事物本质，掌握事物内在规律的方法。抽象化是科学研究的前提。抽象能力是透视事物（或知识）本质的能力，要在教学中加以重点培养，使学生透过能看见的事物，“看到”一般人看不到的内在规律。

六、教学内容与设计

（20 分钟教学演示部分开始）

提问与学生互动	教学内容	教学意图
	<p>一、回顾知识并引出位置设计问题（2min）</p> <p>使用平面四连杆机构模型复习上次课学习的平面四连杆机构的组成原理。</p> <p>如图 3 所示，播放四连杆机构在人们生产生活中得到广泛应用的视频(26s)。</p> <div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: center;"> <div style="text-align: center;">  <p>健身器材</p> </div> <div style="text-align: center;">  <p>飞机起落架</p> </div> </div>	<p>回顾已学知识，引出问题。</p>

提问与学生互动	教学内容	教学意图
---------	------	------

提问：
平面四连杆机构可以实现非常复杂的运动，如何根据连杆的位置设计四连杆机构呢？

多功能玉米抽雄机 工业生产线

火车机车 卫星姿态调整

智能机器人 仿生飞鸟

图 3 四连杆机构的应用视频

这节课我们将学习平面四连杆机构位置设计的 Burmester 理论,依次学习平面四连杆机构的两位置和三位置设计的几何图解法,四位置设计的解析法以及五位置和更多位置设计的统一公式推导与证明,最后作一个小结。

引出本节课程内容。

提问：豪华大巴车门是我们经常选用的长途交通工具。大家注意过车门的开闭是怎么实现的吗？

关键提问：如何设计最适合大巴需要的车门机构？

二、引出 2 位置设计问题（2min）

公交车车门机构设计中需要满足的基本功能：

能够实现车门打开和关闭的需要；
如图 4 所示，播放早期公交车车门开闭机构照片。

图 4 早期的车门开闭机构

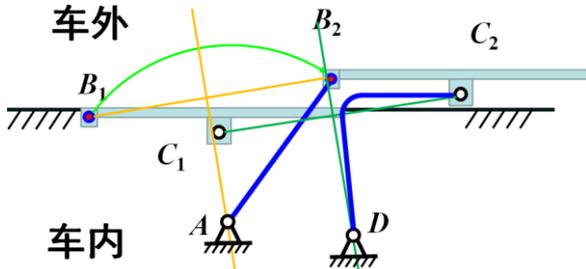
这是早期的车门开闭机构。车门开闭时，站在车门附近的乘客需要让出车门所划过的弧形空间。

豪华大巴车门机构设计中需要实现的基本位置要求：

1. 汽车停稳后可以完全打开；
2. 汽车启动前能够完全关闭；
3. 最好不影响车门附近上下车的乘客。

用车门机构的开闭运动引发学生对机构运动设计的思考。

引导学生思考运动设计的目的。

提问与学生互动	教学内容	教学意图
<p>请大家现在注意观察现代公交车是如何完成车门开闭的。</p> <p>提问：如果采用转动铰实现车门的开闭，如何根据车门的两个运动位置设计转动铰呢？</p> <p>请大家观察车门从关闭到开启过程的运动。</p> <p>提问：如何设计平面四连杆机构 3 位置的运动呢？</p>	<p>我们来看看豪华大巴车门开闭机构视频。（如图 5 所示，播放视频 5s）</p>  <p>图 5 豪华大巴车门开闭机构</p> <p>如图 6 所示，我们来分析车门需要实现的这两个位置要求：</p>  <p>图 6 两位置运动要求的车门机构</p> <p>如图 7 所示，播放现代豪华大巴车门机构的开闭运动视频 (5s)。</p>  <p>图 7 车门开闭机构运动录像</p> <p>结论：通过分析现代豪华大巴车门开闭所要求的空间而进行的二位置设计，可以很好地满足乘客乘车的需要。</p> <p>除了 2 位置设计，在生产生活中，有时我们还需要至少实现 3 位置设计的要求。比如，下肢康复机器人的步态生成机构，它要满足“直立—抬腿—迈步”这 3 个基本运动要求。</p> <p>如图 8 所示，播放康复机器人下肢机构动画 (5s)。</p>	<p>让学生观察车门的开闭过程。</p> <p>总结车门的运动要求</p> <p>通过机构运动简图分析车门的两个运动位置要求。</p> <p>加深学生对两位置设计的认识。</p>

提问与学生互动	教学内容	教学意图
<p>提问：对于基本功能要求，星载探测器姿态调整机构需要实现什么样的位置跟踪呢？</p> <p>关键提问：如何设计星载探测器姿态调整机构的运动呢？</p> <p>提问：如果考虑星载探测器要经过这样 4 个位置的话，会有什么设计结果呢？</p> <p>提问：是什么原因导致了 3 个不重合的中心点呢？</p>	<div data-bbox="467 248 1334 589" data-label="Image"> </div> <p data-bbox="671 589 1126 622">图 11 星载探测器姿态调整机构</p> <p data-bbox="454 629 1329 748">探测卫星姿态调整机构设计中需要满足的基本功能： 能够实现从北极—北半球—赤道—南半球—南极 5 个位置的跟踪的需要；</p> <p data-bbox="454 790 1177 824">卫星姿态调整机构设计中需要实现的基本位置要求：</p> <ol data-bbox="454 831 1342 949" style="list-style-type: none"> 1. 在卫星发射时，姿态调整机构完全收起且能够放入有限的发射空间； 2. 发射后完全展开能够实现 5 位置的跟踪。 <p data-bbox="454 992 1342 1111">结论：姿态调整机构至少要实现 5 位置的跟踪。四连杆机构的多位置跟踪具有非常重要的工程应用，这就需要学习四连杆机构的多位置跟踪问题。</p> <p data-bbox="520 1153 1289 1187">如图 12 所示，我们先来看看一般 4 位置运动设计问题：</p> <div data-bbox="557 1223 1241 1727" data-label="Diagram"> </div> <p data-bbox="608 1731 1193 1765">图 12 PPT 动画演示四位置综合中的问题</p> <p data-bbox="454 1807 1342 2011">结论：几何图解法是欧氏几何严格证明过的，值得信赖；而我们需要反思直观思维存在的问题。我们直观地认为“给定的位置点就是铰链点”显然限制了我们的“发散性思维”。如果将附着在构件上的平面（如图 13 所示）也看作整个构件的话，我们可以期望找到这样的点——当它作为铰链点时，可以使这 3 个中心点重</p>	<p data-bbox="1374 360 1513 768">用星载探测器的姿态调整机构的位置要求，引导学生对四连杆机构运动设计的思考。</p> <p data-bbox="1374 846 1513 1010">引导学生思考运动设计的目的。</p> <p data-bbox="1374 1272 1513 1429">引出四位置设计中的“矛盾”问题。</p> <p data-bbox="1374 1912 1513 1991">引出解析法。</p>

提问与学生互动	教学内容	教学意图
---------	------	------

合。由于图解法 4 位置的几何线条繁多，我们通过分析 3 位置图解的规律来寻求解析法。

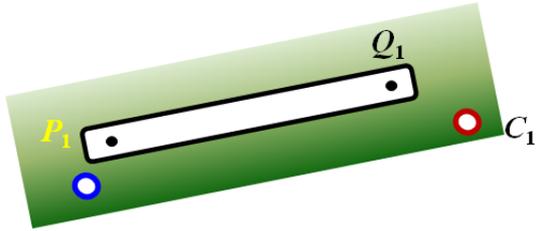


图 13 扩展的构件平面

通过发散性思维，使学生认识到“构件扩展平面”这一概念的现实意义。

提问：如何通过解析方法得到平面四连杆机构 4 位置设计的解呢？

设置坐标系，建立坐标变换矢量。

板书：坐标变换方程（注意板书位置，为后续公式推导留出空间）

四、平面四连杆机构 4 位置设计的解析法（4min）

几何图解法的数学本质是坐标变换。连杆四位置设计的本质是寻找连杆与两侧连架杆的铰链坐标。图 14 展示坐标系建立的过程。

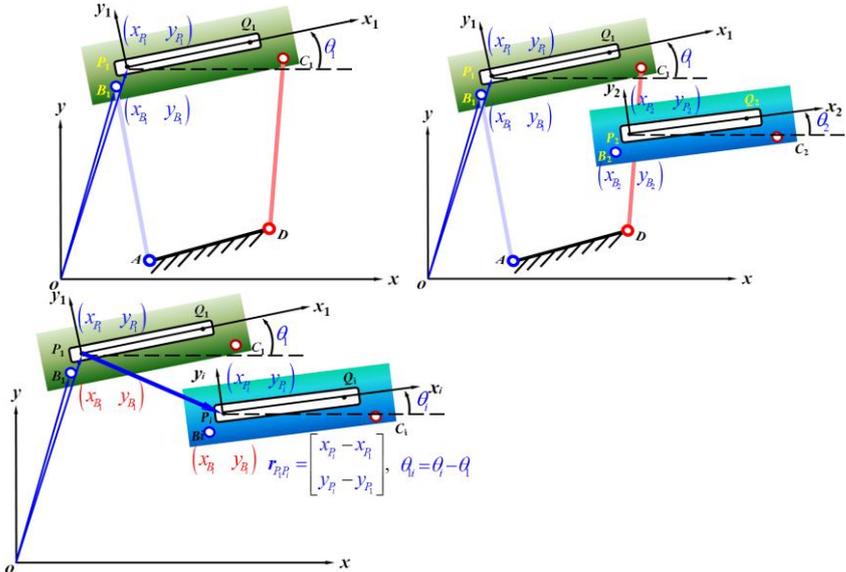
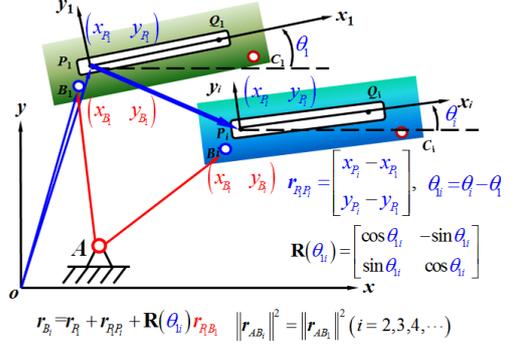


图 14 PPT 动画演示建立坐标系的过程

$$\mathbf{r}_{B_i} = \mathbf{r}_{P_i} + \mathbf{R}(\theta_{li}) \mathbf{r}_{P_i B_i} \quad \mathbf{R}(\theta_{li}) = \begin{bmatrix} \cos \theta_{li} & -\sin \theta_{li} \\ \sin \theta_{li} & \cos \theta_{li} \end{bmatrix} \quad i = 2, 3, 4, \dots$$

根据刚体运动要求，得到如图 15 所示的杆长不变条件：



$$\mathbf{r}_{B_i} = \mathbf{r}_A + \mathbf{r}_{AB} + \mathbf{R}(\theta_{li}) \mathbf{r}_{AB} \quad \|\mathbf{r}_{AB}\|^2 = \|\mathbf{r}_{AB}\|^2 \quad (i = 2, 3, 4, \dots)$$

图 15 建立等距约束方程

引导学生建立坐标系并进行数学处理。

引导学生思考如何将平面运动转化为数学上的“保距变换”方程。

建立解析法的等式依据。

提问：连杆的4个一般位置可以得到几个参变量线性方程？

让学生得出结论：由连杆的4个一般位置可以得到3个参变量线性方程。

引导学生思考以 x_A , y_A 为自变量的线性方程组相容的条件。

$$c_{i1}x_A + c_{i2}y_A + c_{i3} = 0$$

$$\begin{cases} c_{i1} = 2\{[1 - \cos(\theta_i)]x_{B_i} + \sin(\theta_i)y_{B_i} + \cos(\theta_i)x_{P_i} - \sin(\theta_i)y_{P_i} - x_{P_i}\} \\ c_{i2} = 2\{[1 - \cos(\theta_i)]y_{B_i} - \sin(\theta_i)x_{B_i} + \cos(\theta_i)y_{P_i} + \sin(\theta_i)x_{P_i} - y_{P_i}\} \\ c_{i3} = 2\{-x_{P_i}y_{B_i} - y_{P_i}x_{B_i} + x_{P_i}y_{P_i} + y_{P_i}x_{B_i}\}\sin(\theta_i) \\ \quad + 2\{x_{P_i}x_{B_i} - x_{P_i}x_{P_i} - y_{P_i}y_{B_i} + y_{P_i}y_{P_i}\}\cos(\theta_i) \\ \quad - 2y_{B_i}y_{P_i} - 2x_{B_i}x_{P_i} + y_{P_i}^2 + x_{P_i}^2 + y_{B_i}^2 + x_{B_i}^2 \end{cases}$$

如图 16 所示，根据杆长不变条件化简整理得到的线性方程。

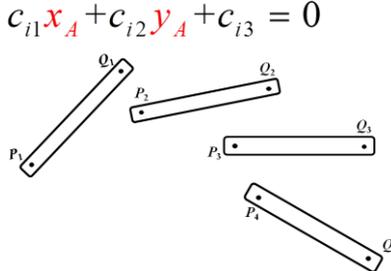


图 16 PPT 动画演示杆长不变条件推导的结果

$$\begin{cases} c_{21}x_A + c_{22}y_A + c_{23} = 0 \\ c_{31}x_A + c_{32}y_A + c_{33} = 0 \\ c_{41}x_A + c_{42}y_A + c_{43} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_{21}x_A + c_{22}y_A + c_{23} = 0 \\ c_{31}x_A + c_{32}y_A + c_{33} = 0 \\ c_{41}x_A + c_{42}y_A + c_{43} = 0 \end{cases} \begin{matrix} \text{方程组} \\ \text{相容} \end{matrix} \begin{vmatrix} c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} \end{vmatrix} = 0$$

关于圆周点坐标的3次方程

$$\begin{cases} c_{i1} = 2\{[1 - \cos(\theta_i)]x_{B_i} + \sin(\theta_i)y_{B_i} + \cos(\theta_i)x_{P_i} - \sin(\theta_i)y_{P_i} - x_{P_i}\} \\ c_{i2} = 2\{[1 - \cos(\theta_i)]y_{B_i} - \sin(\theta_i)x_{B_i} + \cos(\theta_i)y_{P_i} + \sin(\theta_i)x_{P_i} - y_{P_i}\} \\ c_{i3} = 2\{-x_{P_i}y_{B_i} - y_{P_i}x_{B_i} + x_{P_i}y_{P_i} + y_{P_i}x_{B_i}\}\sin(\theta_i) \\ \quad + 2\{x_{P_i}x_{B_i} - x_{P_i}x_{P_i} - y_{P_i}y_{B_i} + y_{P_i}y_{P_i}\}\cos(\theta_i) \\ \quad - 2y_{B_i}y_{P_i} - 2x_{B_i}x_{P_i} + y_{P_i}^2 + x_{P_i}^2 + y_{B_i}^2 + x_{B_i}^2 \end{cases}$$

PPT 动画演示连杆机构位置综合的 Burmester 理论方程

例1：4位置设计

	P1点	P2点	P3点	P4点
x坐标	8	-3.5	-11.5	-15.5
y坐标	-7	-20	-11	-2
方位角	0°	-26°	-40°	-44°

如图 17 所示，有三类不同的圆周点曲线。

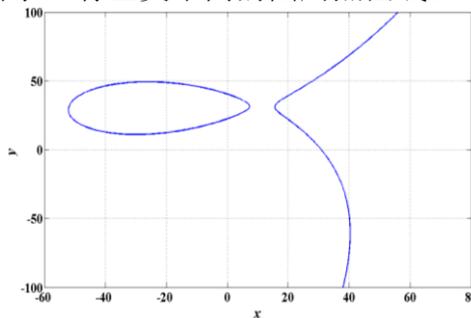


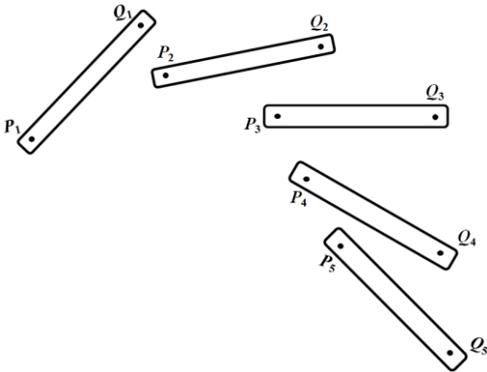
图 17 圆周点曲线一（两分支）

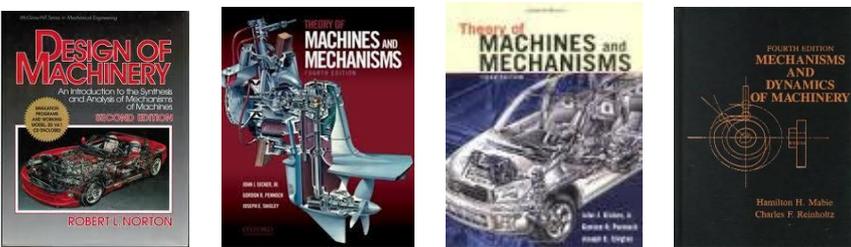
得到含有铰链位置坐标的参变量方程。

得到含有铰链位置坐标的参变量线性方程组。

学生很快会想到刚才使用的增广系数矩阵的行列式为零的方法。

给出圆周点曲线的一个例子。

提问与学生互动	教学内容	教学意图
<p>Burmester(1840.5.5~1927.4.20), 德国人, 数学家, 主要研究射影几何学, 在机构综合和速度分析上有重要贡献。</p>	<p>上述工作最早是由德国数学家布尔梅斯特首先用几何图解法尝试解决的, 为纪念布尔梅斯特的贡献, 我们在机构学上把平面四连杆机构的 4 位置综合的结论称为布尔梅斯特理论。</p>  <p>Burmester(1840.5.5~1927.4.20)</p> <p>布置作业: 4 位置设计圆心点方程及其曲线的编程绘图留作课后作业。</p>	<p>介绍科学家的理论贡献, 激发学生从事科学研究的积极性。</p>
<p>思考: 5 位置设计有什么结论呢? (积极引导, 鼓励学生回答。)</p> <p>关键提问: 如何获得设计问题解的表达式呢?</p> <p>提问: 这是一个长方形矩阵, 如何表达线性方程组相容?</p> <p>提问: 按行组合的方式最少可以组合成多少个方程呢?</p>	<p>五、平面四连杆机构 5 位置设计公式推导及其应用推广 (6min)</p> <p>Burmester 理论是在解决 4 位置设计中提出的理论问题, 但可以扩展到解决如图 18 所示的 5 位置及更多位置的设计。</p>  <p>图 18 PPT 动画演示 5 位置设计问题</p> <p>同学们能够很快写出 5 位置设计需要满足的线性方程组:</p> $\begin{cases} c_{21}x_A + c_{22}y_A + c_{23} = 0 \\ c_{31}x_A + c_{32}y_A + c_{33} = 0 \\ c_{41}x_A + c_{42}y_A + c_{43} = 0 \\ c_{51}x_A + c_{52}y_A + c_{53} = 0 \end{cases}$ <p>方程组的增广系数矩阵为</p> $\mathbf{M} = \begin{bmatrix} c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} \\ c_{51} & c_{52} & c_{53} \end{bmatrix}$	<p>在探讨了平面四连杆机构 4 位置设计的基础上, 引导学生思考 5 位置及更多位置的设计问题。</p> <p>激发学生利用所学的数学知识解决工程问题。</p>

提问与学生互动	教学内容	教学意图
<p>关键提问：对于 $n(n \geq 5)$ 位置的设计问题，最少可以组合成多少个方程呢？</p> <p>关键提问：能否给出 n 位置设计的统一数学表达式呢？</p> <p>提示：如何将长方形矩阵变成方阵呢？</p>	<p>如果采用 3 阶行列式为零的方式来描述这个长方形矩阵的秩为 2，需要同时满足如下 4 个行列式方程</p> $\begin{vmatrix} c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} \end{vmatrix} = 0, \begin{vmatrix} c_{31} & c_{32} & c_{33} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} \\ c_{51} & c_{52} & c_{53} \end{vmatrix} = 0, \begin{vmatrix} c_{41} & c_{42} & c_{43} \\ c_{51} & c_{52} & c_{53} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \end{vmatrix} = 0, \begin{vmatrix} c_{51} & c_{52} & c_{53} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{vmatrix} = 0$ <p>结论：上述方程所给出的曲线的交点就是所求的 5 位置的解，有多少交点就有多少组解。当给定刚体 5 个位置时，设计问题的解是 4 条 3 次曲线的交点。交点的数目可能是 4、或者是 2、或者没有解。</p> <p>国外教材在 Burmester 理论的讲授解析法时，基本都是采用上述的思路（图 19 给出了国外主要教材的封面）。</p>  <p>图 19 现行的国外主要教材封面</p> $C_{n-1}^3 = \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{6}$ <p>当 $n=6$ 时，要计算 $C_5^3 = \frac{5 \times 4 \times 3}{6} = 10$ 个 3 次曲线的交点；</p> <p>当 $n=7$ 时，要计算 $C_6^3 = \frac{6 \times 5 \times 4}{6} = 20$ 个 3 次曲线的交点。</p> <p>结论：求解 20 条或 10 条三次曲线的交点不用说在 Burmester 时代，即使是在计算机发达的今天，又谈何容易呢！</p> <p>能否构造一个三阶方阵，使其包含 n 位置设计的所有行向量信息呢？如果能的话，这说明 n 位置设计所对应的 $(n-1) \times 3$ 的长方形矩阵含有 $(n-1) - 3 = n - 4$ 行冗余信息。这样，问题进一步转化为如何有效压缩矩阵 C 的结构化信息的问题。</p> <p>下面来分析增广系数矩阵：</p> $C = \begin{bmatrix} c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & c_{n3} \end{bmatrix}_{n \times 3}$	<p>引导学生思考布氏理论的统一数学表示问题。（这是布氏理论没有给出的。）</p> <p>引导学生回忆已学过的数学知识。</p>

提问与学生互动	教学内容	教学意图																																																	
<p>关键提问：能否跳出“定向思维”的束缚，另辟蹊径呢？</p> <p>提示：如何证明其充要性？</p>	<p>启发：长方形矩阵向方阵转化的方法：</p> $\mathbf{M} = (\mathbf{C}^T \mathbf{C})_{3 \times 3}$ <p>\mathbf{M} 是 3×3 的方阵。</p> $ \mathbf{M} = 0$ <p>上式表达了圆周点坐标所要满足的方程，这就是 Burmester 理论统一的数学表达式。</p> <p>在学生思考片刻后，通过 PPT 文件讲授我们在科研中给出的证明方法。</p> <p>证明：(1) 必要性</p> $\because R(\mathbf{C}_{(n-1) \times 3}^T \mathbf{C}_{(n-1) \times 3}) \leq R(\mathbf{C}_{(n-1) \times 3})$ $\text{又} \because R(\mathbf{C}_{(n-1) \times 3}) < 3$ $\therefore R(\mathbf{C}_{(n-1) \times 3}^T \mathbf{C}_{(n-1) \times 3}) < 3$ $\therefore (\mathbf{M})_{3 \times 3} = \mathbf{C}_{(n-1) \times 3}^T \mathbf{C}_{(n-1) \times 3} = 0$ <p>(2) 充分性</p> $\because (\mathbf{M})_{3 \times 3} = 0, \therefore R(\mathbf{M}) < 3, R(\mathbf{C}_{(n-1) \times 3}^T \mathbf{C}_{(n-1) \times 3}) < 3.$ <p>因此，存在一个 3 维非零列向量 \mathbf{x} 使得 $(\mathbf{C}_{(n-1) \times 3}^T \mathbf{C}_{(n-1) \times 3}) \mathbf{x} = 0$.</p> $\mathbf{x}^T (\mathbf{C}_{(n-1) \times 3}^T \mathbf{C}_{(n-1) \times 3}) \mathbf{x} = 0, (\mathbf{C}_{(n-1) \times 3} \mathbf{x})^T (\mathbf{C}_{(n-1) \times 3} \mathbf{x}) = 0.$ $\ \mathbf{C}_{(n-1) \times 3} \mathbf{x}\ ^2 = 0, \mathbf{C}_{(n-1) \times 3} \mathbf{x} = 0.$ <p>因为 \mathbf{x} 是 3 维非零列向量，所以 $R(\mathbf{C}_{(n-1) \times 3}) < 3$.</p> <p>证毕</p> <p>例2：5位置设计</p> <table border="1" data-bbox="587 1025 1209 1272"> <thead> <tr> <th></th> <th>位置1</th> <th>位置2</th> <th>位置3</th> <th>位置4</th> <th>位置5</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>x坐标(mm)</td> <td>10</td> <td>-6</td> <td>-13</td> <td>-17</td> <td>6</td> </tr> <tr> <td>y坐标(mm)</td> <td>-5</td> <td>-22</td> <td>-11</td> <td>10</td> <td>5</td> </tr> <tr> <td>姿态角(°)</td> <td>0</td> <td>-26</td> <td>-40</td> <td>-48</td> <td>-15</td> </tr> </tbody> </table> <p>得到了 4 组解</p> <table border="1" data-bbox="593 1348 1209 1639"> <thead> <tr> <th></th> <th>x_{B_i}(mm)</th> <th>y_{B_i}(mm)</th> <th>x_A(mm)</th> <th>y_A(mm)</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>1</td> <td>-30.568446</td> <td>20.960137</td> <td>191.467702</td> <td>-64.838556</td> </tr> <tr> <td>2</td> <td>26.545161</td> <td>32.179730</td> <td>-44.146967</td> <td>-17.273592</td> </tr> <tr> <td>3</td> <td>-0.818763</td> <td>64.804165</td> <td>-13.399540</td> <td>-60.318106</td> </tr> <tr> <td>4</td> <td>38.477471</td> <td>3.216875</td> <td>-25.700624</td> <td>9.351623</td> </tr> </tbody> </table> <p>这说明 5 位置设计可以有 4 组解。对于一般情况而言，任意的 5 位置设计可能有 4 组解、2 组解和无解三种情况。</p> <p>而这里给出的统一设计公式可以适用于任意位置的求解(包括更多位置的近似解)，这实际上完善了 Burmester 理论，将其推广到了任意的一般 n 位置设计。</p>		位置1	位置2	位置3	位置4	位置5	x坐标(mm)	10	-6	-13	-17	6	y坐标(mm)	-5	-22	-11	10	5	姿态角(°)	0	-26	-40	-48	-15		x_{B_i} (mm)	y_{B_i} (mm)	x_A (mm)	y_A (mm)	1	-30.568446	20.960137	191.467702	-64.838556	2	26.545161	32.179730	-44.146967	-17.273592	3	-0.818763	64.804165	-13.399540	-60.318106	4	38.477471	3.216875	-25.700624	9.351623	<p>实现理论的严谨性证明</p> <p>加深学生对理论公式的认识</p>
	位置1	位置2	位置3	位置4	位置5																																														
x坐标(mm)	10	-6	-13	-17	6																																														
y坐标(mm)	-5	-22	-11	10	5																																														
姿态角(°)	0	-26	-40	-48	-15																																														
	x_{B_i} (mm)	y_{B_i} (mm)	x_A (mm)	y_A (mm)																																															
1	-30.568446	20.960137	191.467702	-64.838556																																															
2	26.545161	32.179730	-44.146967	-17.273592																																															
3	-0.818763	64.804165	-13.399540	-60.318106																																															
4	38.477471	3.216875	-25.700624	9.351623																																															

例3：6位置设计

位置	x_L 坐标	y_L 坐标	x_R 坐标	y_R 坐标
1	1.046800	1.382700	2.577900	1.777300
2	1.127700	1.812200	2.708300	1.855700
3	0.684600	1.987400	2.264400	1.921500
4	0.119700	1.786300	1.700700	1.764300
5	-0.256500	1.325300	1.315600	1.494400
6	-0.316000	0.867500	1.189100	1.352100

得到了一个精确解。如图 20 所示，动画显示所求的四连杆机构可以依次经过所要求的位置

例3：6位置设计

圆心点 B_1	圆周点 C_1	圆心点 A	圆周点 D
(0.749678,-0.000165)	(3.017368,1.466613)	(-0.000396,-0.000156)	(2.700123,-0.001168)

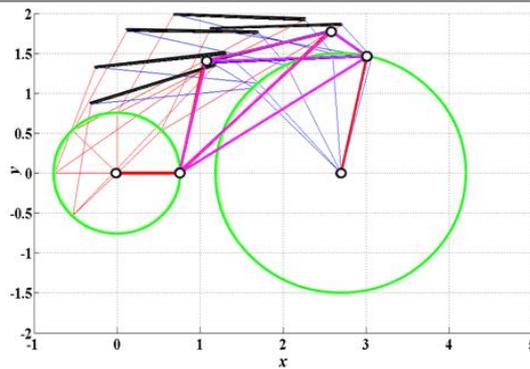


图 20 6 位置解的结果

当 6 位置不满足精确解的条件时，用这节课给出的统一设计公式还可以解出最佳近似解。

例4：6位置设计

位置	x_L 坐标	y_L 坐标	x_R 坐标	y_R 坐标
1	1.046800	1.382700	2.577900	1.777300
2	1.227700	1.752200	2.808300	1.795700
3	0.684600	1.987400	2.264400	1.921500
4	-0.080300	1.886300	1.500700	1.864300
5	-0.256500	1.325300	1.315600	1.494400
6	-0.316000	0.867500	1.189100	1.352100

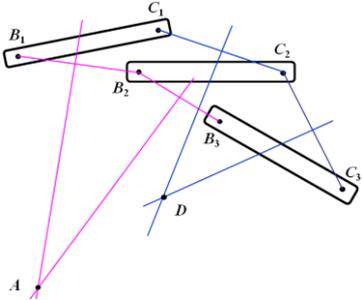
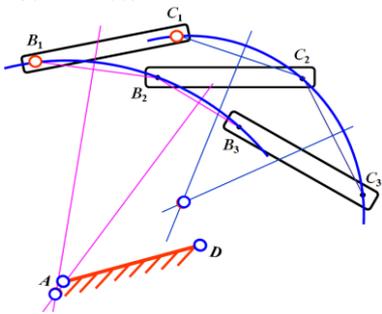
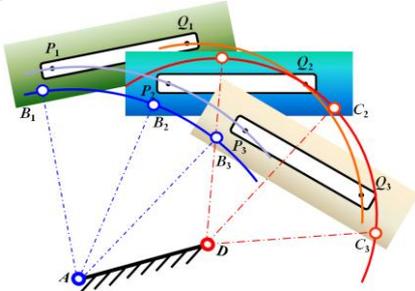
如图 21 所示，动画显示可以依次最佳接近给定的位置。

在 6 位置精确设计中的应用

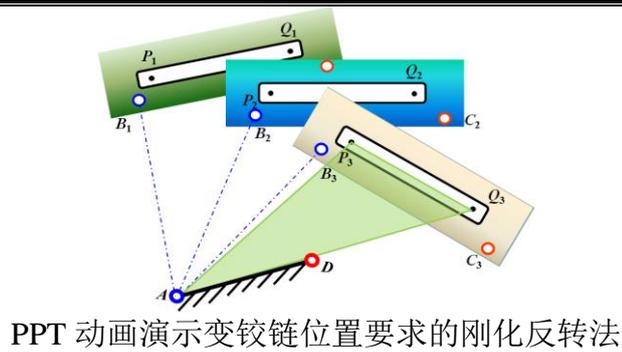
在 6 位置近似设计中的应用

提问与学生互动	教学内容	教学意图
	<div data-bbox="539 248 1249 763" data-label="Figure"> </div> <p data-bbox="754 772 1045 806">图 21 6 位置近似解</p> <p data-bbox="454 813 1345 929">该过程表明，在研究型学习中，应鼓励学生在掌握理论知识的同时，注意发现已有理论和方法的不完善性，尝试从中找到新的理论突破口并寻求解决方法。</p> <p data-bbox="454 936 1345 1014">最后，如图 22 所示，播放扑翼式飞行器扑翼驱动四连杆机构的 12 位置近似设计的动画。</p> <div data-bbox="547 1016 1252 1310" data-label="Image"> </div> <p data-bbox="606 1317 1193 1350">图 22 扑翼式飞行器驱动四连杆机构动画</p>	<p data-bbox="1374 806 1513 1176">通过扑翼式飞行器的驱动四连杆机构 12 位置的近似设计来加深学生对多位置设计的认识。</p>
	<p data-bbox="762 1397 1021 1433" style="text-align: center;">六、小结 (2min)</p> <ol data-bbox="454 1440 1345 1724" style="list-style-type: none"> 1. 当给定刚体的位置数不超过 3 个时，刚体平面上任意一点都可以选作圆点。 2. 当给定刚体的 4 个位置时，圆点/圆心点曲线均为 3 次曲线，称为 Burmester 曲线，曲线上的任意一点也都可以选作圆点/圆心点。 3. 当给定刚体 5 个或更多位置时，我们独立给出并证明了 Burmester 理论的统一表达式，避免了曲线求交的讨论。 <p data-bbox="454 1742 1345 1821">下次课，我们在运动设计的基础上考虑平面四连杆机构的传力特性，学习连杆的受力分析及其在设计中的应用。</p>	<p data-bbox="1374 1433 1513 1552">总结本节课的主要内容。</p>
<p data-bbox="129 1850 1513 1928">以上为 20min 教学内容。在 45min 教学安排中，将扩充第三、四、五部分的教学内容，主要是 4 位置的几何图解法和更多位置设计的实例。具体简述如下：</p>		

在一般 3 位置设计之后，扩充“给定机架上固定铰链点的 3 位置设计”以增强学生对刚化反转法的认识，为引入坐标变换提供更好的过渡。这部分内容的几何直观性强，应给学生足够思考的时间。（10min）

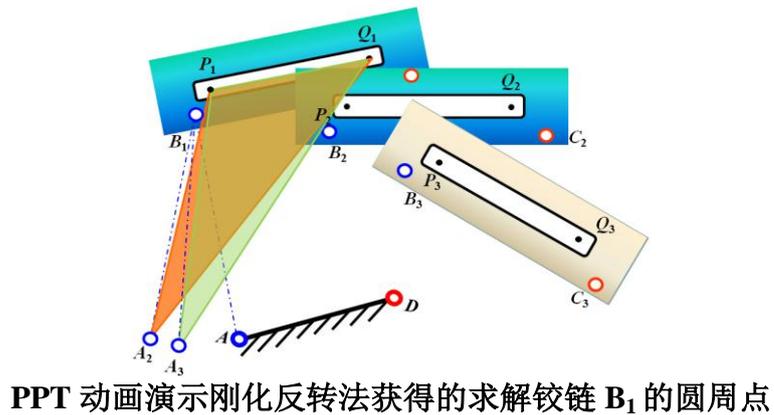
提问与学生互动	教学内容	教学意图
<p>提问：如果所得的铰链点 A 和 D 这组“唯一解”无法加工制造，而需要偏移某一距离时是否能做得到呢？</p> <p>提问：如何解决这样的矛盾？</p>	<p>接前面“三、平面四连杆机构 3 位置设计的 Burmester 理论 (3min)”</p>  <p>PPT 动画演示一般三位置设计的解</p> <p>结论：三位置综合有唯一解。</p>  <p>PPT 动画演示三位置设计中有铰链位置要求的问题</p>	<p>引导学生思考这一需求与先前得到的“三位置问题有‘唯一解’的矛盾”，引出本次课程的重点内容——四位置设计的 Burmester 理论。</p>
<p>提问：如何找到变换后的连杆铰链点呢？</p> <p>提问：如何刚化对应的这 3 个位置？</p>	<p>四、平面四连杆机构 4 位置设计的 Burmester 理论 (7min)</p>  <p>PPT 动画演示变铰链位置要求的可行解</p> <p>提示学生可以通过把后续的各位置“刚化反转”到第一位置来寻求问题的突破。</p>	<p>引导学生运用发思维将连杆向整个平面扩展，以求问题的解决。</p> <p>启发学生尝试“刚化”并“反转”后铰链位置应满足的关系。</p>

提问:如何确定铰链 B_1 的位置?



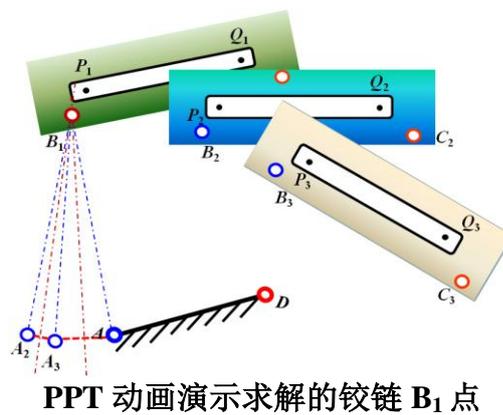
引导学生自己思考求解方法。

提问:请大家总结这类问题的图解法步骤,并给出 C_1 位置求解思路。



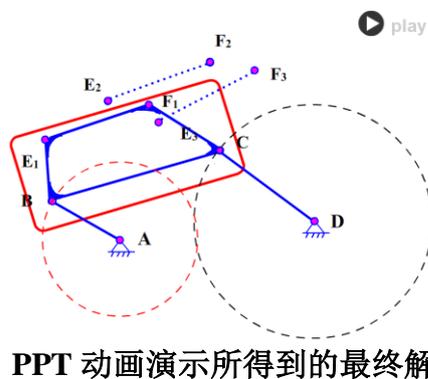
激发学生自己总结求解思路,并用于求解连杆右侧铰链点的位置。

提问:请大家回顾给定铰链点的 3 位置综合的方法。

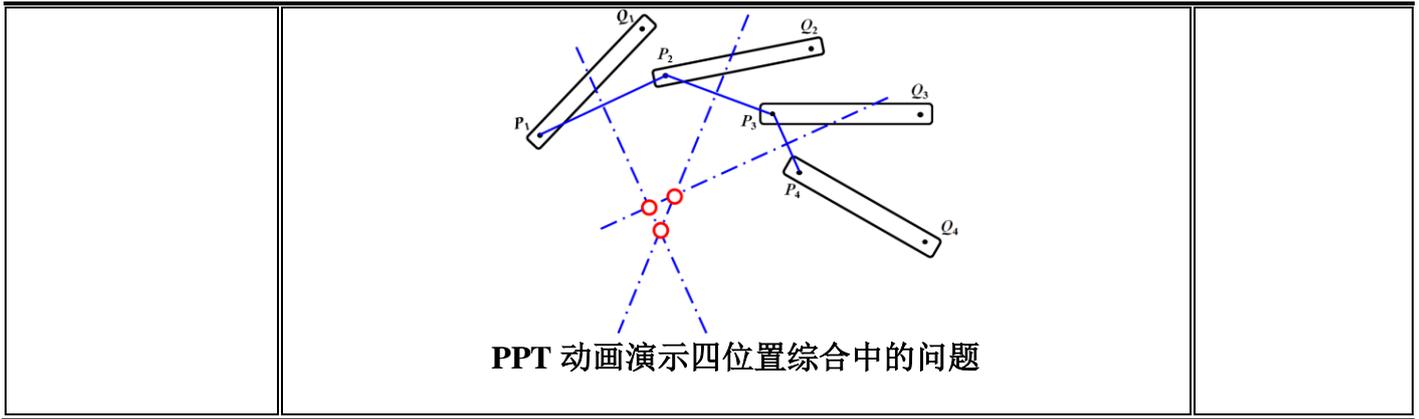


引导学生通过发散性思维过程,思考连杆 4 位置问题并尝试给出方法。

提问:3 个圆心点不重合,如何解决?



提示引导学生思考“刚化反转”的数学本质。

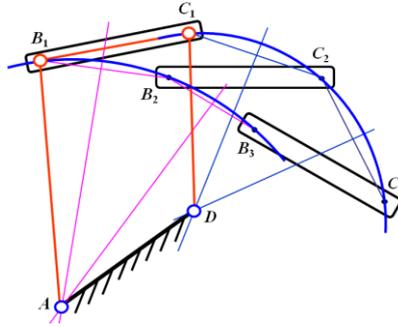


在一般 4 位置解析法之后，扩充“介绍三种主要圆周点曲线的形状的例子”。这部分内容旨在增强学生对圆周点曲线类型的认识。同时，为深化学生对设计问题物理本质的理解，增加一个解析法与几何图解法对比的例子。（10min）

提问与学生互动	教学内容	教学意图
	<p style="text-align: center;">四、平面四连杆机构 4 位置设计的解析法</p> <p>接例 1，改变例 1 的位置点的坐标，可以得到不同的圆周点曲线。</p> <div style="text-align: center;"> <p>圆周点曲线一（两分支）</p> <p>圆周点曲线二（拇指线）</p> </div>	<p>介绍三种主要圆周点曲线的形状。</p>

圆周点曲线三（纽结线）

再次给出几何图解法得到的三位置图解结果。



提问：当给定固定铰链 $A(x_A, y_A)$ 的位置时，用解析法获得解的情况又如何呢？

$$\begin{cases} c_{21}x_A + c_{22}y_A + c_{23} = 0 \\ c_{31}x_A + c_{32}y_A + c_{33} = 0 \end{cases}$$

这在数学上有唯一解：

$$\begin{cases} x_A = -\frac{\begin{vmatrix} c_{23} & c_{22} \\ c_{33} & c_{32} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} c_{21} & c_{22} \\ c_{31} & c_{32} \end{vmatrix}} \\ y_A = -\frac{\begin{vmatrix} c_{21} & c_{23} \\ c_{31} & c_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} c_{21} & c_{22} \\ c_{31} & c_{32} \end{vmatrix}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_{i1} = 2\{[1 - \cos(\theta_{li})]x_{B_i} + \sin(\theta_{li})y_{B_i} + \cos(\theta_{li})x_{P_i} - \sin(\theta_{li})y_{P_i} - x_{P_i}\} \\ c_{i2} = 2\{[1 - \cos(\theta_{li})]y_{B_i} - \sin(\theta_{li})x_{B_i} + \cos(\theta_{li})y_{P_i} + \sin(\theta_{li})x_{P_i} - y_{P_i}\} \\ c_{i3} = 2\{-x_{P_i}y_{B_i} - y_{P_i}x_{P_i} + x_{P_i}y_{P_i} + y_{P_i}x_{B_i}\}\sin(\theta_{li}) \\ \quad + 2\{x_{P_i}x_{B_i} - x_{P_i}x_{P_i} - y_{P_i}y_{P_i} + y_{P_i}y_{B_i}\}\cos(\theta_{li}) \\ \quad - 2y_{B_i}y_{P_i} - 2x_{B_i}x_{P_i} + y_{P_i}^2 + x_{P_i}^2 + y_{P_i}^2 + x_{P_i}^2 \end{cases}$$

结论：通过解析法与几何图解法的结论对比，我们知道 3 位置综合的几何图解法“**唯一解**”的实质是“**给定位置的铰链点与‘固定铰链点’的‘一一映射’关系是唯一的！**”。
这样可以深化学生对设计问题物理本质的理解。

从连杆四位置设计所获得的解析理论应用到三位置设计的问题。

运用所学的数学知识得出结论。

引导学生发现铰链点 A 的坐标与 B_1 的坐标具有“一一映射”关系。

在第五部分之后，扩充“扑翼式飞行器驱动四连杆机构设计的例子”，以进一步增强学生对多位置设计客观需求的认识并熟练掌握新理论公式的使用。（5min）