北京高校第八届青年教师教学基本功比赛

教案主题：母函数的定义与性质

比赛类别：理工类

比赛组别：A

选手姓名：马昱春

2013 年 5 月 22-24 日

北京高校第八届青年教师教学基本功比赛教案

母函数的定义与性质

课程名称：《组合数学》

课程类型：基础理论课

授课对象：信息学院研究生

2013 年 5 月 22-24 日

一、课程简介

【课程名称】

中文：《组合数学》
英文：Combinatorics

【课程类型】

基础理论课

【教学对象】

计算机相关专业研究生

【课程内容简介】

《组合数学》是计算机专业核心的基础理论课。该课程面向计算机、自动化、微电子等信息专业研究生开设，侧重介绍组合数学的概念和思想，研究离散对象的计数方法和相关理论。具体的教学内容包括计数的基本法则、母函数与递推关系、鸽巢原理、容斥原理、波利亚计数定理以及线性规划最优化理论。

【教学目标】

以离散对象的计数方法为教学的主线，使学生能熟练掌握相关的数学模型、有效方法以及算法设计思路，培养学生具备相关的计算机算法分析和设计能力；将数学抽象思维和方法论贯穿于教学过程中，使学生深入理解知识的内涵和外延，培养学生发散性的思维和严谨的逻辑推理能力，从而为后续算法设计和科学研究打下坚实的基础。

【教材与参考资料】

教材：

［1］《组合数学》，第四版，卢开澄，卢华明著，清华大学出版社，2006。

参考资料：

［2］Introductory Combinatorics，第五版，Bruali, R.A.， 2009。

［3］Applied Combinatorics，第二版，Roberts, F.S.， 2005。

［4］《组合数学》，屈婉玲著，北京大学出版社，2007。

【前导课与后续课】

本课程是面向信息学院计算机相关专业研究生开设的基础理论课。该课程作为一门数学课，建立在本科专业基础课程（如《高等数学》、《离散数学》、《数据结构》等）基础之上，同时也是后续研究生课程《算法设计》的前导课程。本课程与主要相关课程的关系如图 1 所示。

图 1 《组合数学》前导课和后续课

【课程特点分析】

作为计算机相关专业的基础理论课，“组合数学”既有数学基础课的特点，也脱离不开计算机专业的特色。尤其是面向研究生授课，其理论内容不能脱离专业的实用价值。本课程的教学过程始终围绕课程的特点展开。

1. 课程知识体系广博而深奥，经典的内容仍然具有鲜活的生命力

组合数学作为数学的一个分支，所研究的是离散事物计数的技巧[1]，其历史可以追溯到上古时代洛书河图中关于幻方的记载。随着几何学、拓扑学以至范畴论的形成与发展，逐渐产生了各种计数的技巧；而近代的集合论、数理逻辑、代数拓扑和代数几何等新兴理论的发展又进一步地将离散事物的形与数密切地联系在一起。由此观之，组合学与其他数学分支有着千丝万缕的联系，而它的研究内容与方法来自各个不同知识体系，其分析和求解的方法往往不拘一格，需要发散的思维方式。

也正是由于组合数学研究的不确定性，目前仍然有许多未解的难题。公认的伟大数学家，沃尔夫奖的获得者盖尔芳德(Alexander Osipovich Gelfond: 1906-1968)就曾预言组合数学和几何学将是二十一世纪数学研究的前沿阵地。组合数学的教学内容不是静止的，它在与其他知识体系的交叉和融合过程中站在了科学研究的前沿，是一个具有蓬勃生机和广泛应用的学科。

2. 组合数学的发展奠定了计算机发展的基础

组合数学的发展改变了传统数学中分析数学和代数占统治地位的局面。如果说微积分和近代数学的发展为近代工业革命奠定了基础；而组合数学的发展则是奠定了计算机革命的基础。计算机所处理的对象是离散的数据，研究离散对象的科学恰恰就是组合数学。计算机根据人所编写的程序算法来实现计算的功能。正是因为有了组合算法才使人感到，计算机好象是有思维的。因此组合数学知识的缺失就会导致编程者缺乏算法分析能力，也就使计算机所能具有的计算能力受到限制。纵观计算机行业的大发展，根本的推动力在于组合算法的发展和对理论知识的综合应用。因此，培养世界一流的信息专业科研人员，就必须培养学生综合运用数学分析以及算法设计的能力。

二、单元教学任务和目标

【教学任务】

在 50 分钟内讲授“母函数的定义和性质”。（其中 20 分钟参赛内容为“母函数的定义”）

【教学目标】

1、知识层面

- 了解母函数的发展历史和基本定义；
- 以整数拆分数为例熟悉和掌握母函数计数方法；
- 掌握母函数多项式相乘的算法实现并了解算法的设计瓶颈；
- 掌握母函数的多种运算性质。

2、能力层次

- 能够深入理解母函数与分析数学中函数的区别和联系，了解母函数是数列的映射；
- 能够熟练掌握整数拆分的程序实现从而了解母函数计数的工具方法；
- 能够将函数的若干运算引申到母函数形式中。

3、思维层次

- 通过“映射关系”认识母函数与数列的本质联系，**母函数“似函数，非函数，是映射”**；
- 摆脱分析数学中对函数形式的思维定势，通过转换视角的发散性思维过程体会**“正看是根逆是树”**的精妙；
- 体会经典理论和现代计算机技术彼此推动发展的过程，培养**“古树新花相衬映”**的科学理念。

三、单元知识重点

1. 母函数的基本概念的深入理解

正如函数是分析数学的基础，母函数计数方法的提出是组合计数方法从特殊走向一般的里程碑，开辟了组合计数的新领域。在第一章《排列组合》的学习中，虽然学生已经掌握了计数的基本法则，但是其认识还仅仅停留在利用排列组合知识对特定问题采取相应解法的阶段。本章面向数列的通项形式介绍组合数学中最重要的计数方法：母函数方法。**面对复杂的计数问题，母函数方法巧妙地将离散问题转化为了解析形式，**通过建立幂级数系数与计数序列的一一对应关系，可以有效地求解包括递推关系序列在内的复杂计数序列。

母函数的定义展现了组合数学中发散性思维的精妙，其概念的深入以及对其性质的讨论体现了分析数学和组合数学形式上的联系和本质的不同。经过多年的发展和积累，母函数方法已经自成体系，不仅仅在组合数学、概率论、有限差分等数学领域中占据了重要的位置，更重要的是它是计算机科学中复杂算法分析的基础。

2. 整数拆分数的母函数方法

整数拆分数问题作为数论研究的经典问题始终活跃在理论数学的前沿，并且在密码学，

生物学，概率分析等领域具有重要的应用。整数拆分数的母函数方法巧妙地将复杂的分步分类情况的枚举过程蕴含在多项式乘法运算中，结合计算机算法的设计可以有效地实现对较大数字的整数拆分数的计算。整数拆分数的母函数方法求解过程是对母函数形式和方法的直观演绎，学生们通过对其分析和深入可以更好地掌握母函数定义的形式和意义。同时**通过对整数拆分数求解极限的探索更进一步的体会母函数方法的瓶颈所在，在认识其本质的同时更深层次地思考理论知识的适用性。**

四、学生分析与教学难点

本课程大部分的选课学生来自计算机相关专业的一年级研究生，其中不乏来自各个省市的尖子学生。他们在本科阶段已经受到了严谨的理工科思维训练，具有严密的逻辑思维能力，并通过本科四年的学习和培养具有较好的数理基础和编程能力。组合数学虽然是计算机专业的理论基础课，但是仍以理论数学为基础，其内容繁杂，技巧性很强。如何将这门“内容繁杂、难学难懂”的课变为“融会贯通、爱学易懂”的课，一直是组合数学教学中备受关注的问题。下面从学生的知识结构和心理特点出发分析教学的难点。

1. 数学基础知识完善，但不善于对知识本质的挖掘和深入；

作为计算机相关专业的研究生，他们在本科学习过高等数学，线性代数，离散数学等理论课程，对数学分析中的概念和数理逻辑等推理分析等都比较熟悉，对一般概念的理解并无障碍。但是在对概念理解的同时，学生希望有更深层次的理解和收获。本次授课内容中母函数的概念非常抽象，目前所有的教科书均直接引入其概念，学生看到之后往往局限在概念的“拿来主义”，虽然能够理解其概念和应用，但是单纯的逻辑描述只能实现知识层面的平移。因此，要解决好概念的抽象性和认知理解的这对矛盾，关键在于如何引领学生跳出概念的**理解**层面,挖掘出概念所蕴含的**本质**。要让学生做到不仅“知其然”，更要“知其所以然”，却是一件非常困难的事情，需要从更高的层次对概念进行概括和认知。

对于经典的抽象定义，参赛教师在母函数概念的讲授中从简单计数问题逐步复杂化后出现的求解困难的情景出发，通过对细节的剖析，经历“分析”、“假设”、“推理”等过程，最终将必然的解决方法展现在学生面前，启发学生逐步认识到母函数形式的必然性，使得新概念的引入顺利成章。参赛教师通过展示母函数定义与计数问题的映射关系，向学生展现了科学方法论的普遍适用性和重要意义。通过合情推理过程，学生会觉得新知识体系的建立是合情合理的，甚至会觉得“母函数概念并不那么神秘，如果自己生在那个年代，也能想得到。” 作为研究生的学生们在未来的研究学习中会常常遇到类似的场景，从知识的本质来培养学生运用科学方法论的意识，对他们未来的工作和学习具有重要的意义。

2. 重实践轻思维，缺乏创新性思维的锻炼；

计算机相关专业实践性很强，往往需要建立严密的逻辑思维。经过本科的通识教育，大部分的学生已经具备实践编程能力，有一定的编程经验。而计算机的编程逻辑往往是一种从输入到输出的正向思维过程，在问题的求解过程中常采用直观的思维。回顾计算机专业的相关课程，往往集中在算法和知识的介绍，学生所锻炼的是将经典算法应用到实际问

题的求解能力。但是对于算法的由来或者蕴含其中的创新性思维却常常无从可查，这样也使得学生的思维局限于学会知识，缺乏对知识体系之间相互联系的认识，由此也造成了所学的数学工具与编程实践之间的断档。尤其刚进入研究生阶段的学生，正处于从知识学习向科研探索转变的过程中，分析问题和解决问题的创新能力成为日后研究生阶段乃至整个职业生涯的重要能力。

本次课程中母函数的概念比较抽象，完全跳出了传统意义中函数的概念，这样巧妙的设计无疑是人类智慧的结晶。但是历史沉淀在教材中的却是不到三行的概念描述，抹杀了其归纳总结过程中思维的火花。如何从抽象概念出发，逐步带领学生体会和领悟人类高级心智文明的成果，没有现成的经验可循，相关的资料也是支离破碎，零零散散。因此如何从思维的层面总结母函数定义所蕴含的创新性思维具有很大的挑战。

参赛教师将本节的教学过程设计成思维引领的过程：通过对问题的组织，史料的整理，逐步抽丝剥茧，引导学生主动思维，探索问题求解的矛盾发展演变过程，最终很自然地归纳出母函数定义中所蕴含的逆向思维过程。为鼓励学生创新，参赛教师每学期的课程中都会设立创新项目，主题不限，与组合数学相关的任何内容都可以。并且在期末对优秀的项目进行奖励，设立最佳论文奖，并举行小型的颁奖活动，使学生们从实践中去感受创新思维的过程，体会创新所来带的快乐和成就感。这几年的实践表明，课堂上鼓励创新往往也能推动学生的科研成果。学生不仅将课堂上的知识运用到教研组课题中，发表了国际顶级会议论文以及国际 SCI 期刊论文，还有学生将自己的发现和成果整理提交，被国际权威数论数据库 OEIS 中收录。

3. 关注科研，但缺乏对科研方法的深层次认识

作为已经学习数学若干年的计算机专业研究生来说，他们已经脱离了“了解概念，会做几道习题，考试拿个好成绩”的应试教育的需求。面向未来的科研工作，他们的学习需求已经上升到对高层次的数学思维,甚至是科研方法的追求。虽然近年来组合数学的理论知识被广泛地应用到计算机程序设计中，不断地推陈出新，但是《组合数学》教材往往只总结了系统的理论知识，对于其发展和应用并无涉及。那么如何把握知识的脉络，以前沿带动学生的学习和实践，需要广泛的涉猎和条理性的归纳。

本小节所介绍的母函数方法经历了几百年的发展和完善，现在仍然活跃在科研的前沿。参赛教师以整数拆分数为例，阐述了将母函数方法结合计算机程序实现的分析过程，并通过程序的演示和分析，带领学生体会整数拆分数不断追求极限的研究过程。通过体会前人的研究历程，总结一定的客观规律，也能在日后的科研工作中形成自发的科研意识。

五、教学创新点和教学理念

1. 深刻地揭示科学知识的本质及其与相关知识的联系——母函数“似函数，非函数，是映射”

对教学来说，“**深刻地揭示科学知识的本质及其与相关知识的联系**”固然不是一条新的教学理念,但是却是教学中最重要的。如果这一条做不好，其它的都无从谈起。而对一个教师来说，要做好它却是很难的。

本单元所讲授的母函数概念在屈婉玲教授编著的《组合数学》定义如下：

设 $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$是一个数列，做形式幂级数：

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + \ldots , \tag{1}$$

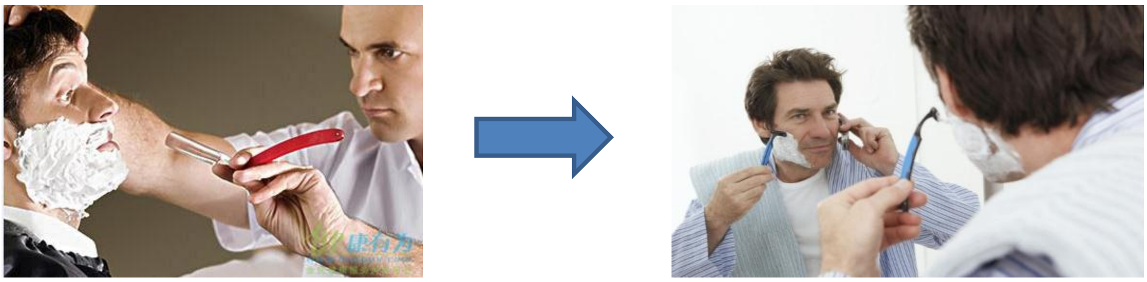
我们称 $f(x)$是数列 $a_0,a_1,\ldots,a_n,\ldots$的母函数（又称生成函数）。

这样的定义简洁，清晰，但是学生看了后往往会感到疑惑:“究竟为什么要把函数和数列扯上关系呢？”“为什么称母函数为形式幂级数呢？”“如果母函数 $f(x)$是‘妈妈’，那‘儿子’是谁呢？”等等。这说明，上述母函数的定义虽然从概念上高度概括，但是作为初学者仅从字面上无法抓住其科学本质。要使学生做到对概念的“真理解”，关键在于教师自身要对知识本质的“真理解”。

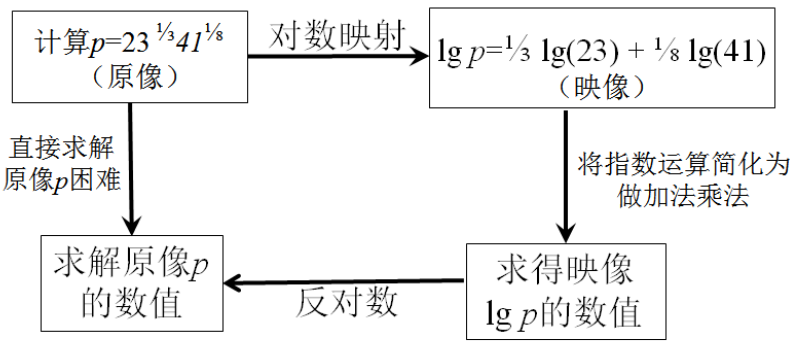
参赛教师认为，母函数的定义中，其精髓落实在一个**“母”**字上，母函数方法的深刻正是因为其概念巧妙地运用了函数在形式上对其系数序列的蕴含关系，建立了数列和母函数之间的**“映射”**。

所谓映射，是两类数学对象之间建立的某种“对应关系”。

徐利治教授在《数学方法论选讲》(华中科技大学出版社，2000 年 1 月，第三版）中用人对着镜子剃胡子做了形象的讲解。一个人对着镜子剃胡子，胡子称为原像，镜子里照出的胡子则称为映像。从原像到映像的关系则叫做映射，正是这种映射关系的存在使得人可以用剃刀准确地修剪胡子。而在数学上映射关系也常常用到，比如图 2(b)展示了指数与对数的映射关系。要计算相应的指数运算结果 p，由于分数幂次的存在，直接计算是非常困难的，而寻找到对数的映射后就可以把原问题转化为简单的四则运算，再通过反对数的反演之后可以求得原问题 p 的值。正是对数映射关系使得指数的计算大为简化，同时也开创了基于对数表的数值计算方法。



(a) 生活中的映射关系



(b) 对数映像关系

图 2. 映射关系

在母函数方法中，这种映射关系体现得淋漓尽致。为了求解一个数列$\{a_n\}$: $a_0, a_1, a_2\ldots$的一些值，则利用形式幂级数 $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + \ldots$ ，将一个离散性的数列对象换成了一个在分析学上便于处理的解析对象。母函数中幂次的系数正如镜子中胡须的映像一样，与原像数列一一对应。由于在分析学中对于幂级数运算已经有了一套固定的方法，所以在映射关系下，作为幂级数系数的数列$\{a_n\}$的结构问题也就便于分析计算了。因此母函数是“妈妈”，数列就是“儿子”。参赛教师更进一步形象地说，**母函数“似函数，非函数，是映射”**。这种形象化的语言，充分揭示了母函数与数列的映射关系，通过对知识本质的深度洞察，揭开了数学抽象概念神秘的面纱。

参赛教师在讲授了母函数的定义之后，又引申讲到，在一类数学对象难于求解时，能够找到这类对象与相关数学对象的映射关系就成为顺利解决这类数学问题的关键。因此**寻找到映射关系就是“数学发现”，寻找映射是数学家重要的思维方式。**

教学理念 尽管对于一个数学命题，有严格的定义，严谨的推导和符号化的表达，应该说，知识的本质及其联系已全部包含其中。但是对于学生来说，初学时一般会仅停留在字面的理解上，而不能挖掘字里行间所蕴含的深刻本质。**因此深刻揭示知识的本质及其与相关知识的联系就是教学中最重要的教学理念，真正做好它就实现了教学上一项最重要的创新。**

2. 用发散思维的讲授，突破学生的思维定势——“正看是根逆是树”

函数的概念对学生来说耳熟能详。提到函数，求极值，求导都是如数家珍的条件反射。但是母函数一改分析数学的概念模式，不管收敛性，甚至不管自变量的取值，关心的却是以往都当常量看的系数。这样的思维方式转变对学生来说无疑具有不小的冲击。学生的学习往往带着对一般函数概念的认识来理解母函数。在接受新概念的新视角的同时，也会产生这样的疑问：“母函数 $f(x)$这样的形式幂级数怎么看都是一般的函数，为什么它就成为了数列的映射呢？”正如图 3（a）中所示，函数的概念如同“树根”一样深植于分析数学的土壤中，站在地上前后左右看都是一棵树根。要在学生的脑海中想把函数的形式从分析数学中拔出来谈何容易。在最初的教学中，参赛教师按照教材中的安排，一开始就把母函数的定义如上述公式（1）宣讲出来，再举几个计数的例子。但是每每讲到这里，将近 300 多人的教室中就处于一种沉闷焦灼的状态。函数概念的思维定势总是萦绕在学生的脑海中，课间还会有学生满脸不惑的来询问: “母函数的展开式中如果不收敛的话怎么办？”要注意到，今天课堂上学生们的困惑，正是历史上思维困惑的“重演”。

回顾函数定义的历史发展。1755 年，欧拉(1707－1783) 在莱布尼茨和牛顿的研究基础上给出了函数的明确定义：“如果某些变量，以某一种方式依赖于另一些变量，即当后面这些变量变化时，前面这些变量也随着变化，我们把前面的变量称为后面变量的函数。”值得注意的是，欧拉早在 18 世纪 40 年代就已经想到了母函数的意义，但是却未能给出它的确切定义。直到欧拉死后，才由拉普拉斯在 1812 年首次系统地提出和研究了母函数的定义和方法，从而使得母函数能够自成体系，以至于后来在概率论，有限差分、特殊函数论等数学领域中占据了重要的位置。这说明，即便是像欧拉这样的大数学家对母函数的研究都表现出上述的迟疑，未能科学地将母函数与函数的概念严格地区别开。这段历史的发展说明，人类从认识函数到母函数概念存在着一个很大的认识台阶。要想跨越这个台阶需要突破思

维定势，以逆向的思维方式展开，如同图 3(a)中的那个树根，如果你想像着倒着来看它，那它就是一棵树，正所谓**“正看是根逆是树”**。

逆向思维是一种打破常规的发散性思维。如果深入地研究函数的形式：

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n \tag{2}$$

可以看到其中有三类设计因素：自变量 x，目标函数 $f(x)$，以及系数序列 a_n。其本身形式让我们自然地将眼光落在了变量 x 的身上。此时“主角”是 x，“配角”是 a_n。但是如果我们换个角度看公式（2），把视角从变量 x 转换到系数 a_n 上，母函数概念便跃然纸上。此刻 a_n 就成了“主角”，而 x 则是“配角”，甚至是个“龙套”角色了。**正是这种发散思维的演绎，才打破了对函数形式的单一认识，并体现了数学推理过程中所蕴含的数学美感**。

教学理念 教学中不仅要教具体的知识，更重要的是培养学生的思维方式和学习方法。**正如康德的名言：“重要是给予思维，而不是给予思想。”这句作为康德墓志铭的话极其精辟和精彩，正是参赛教师所遵循的重要的教学理念。**

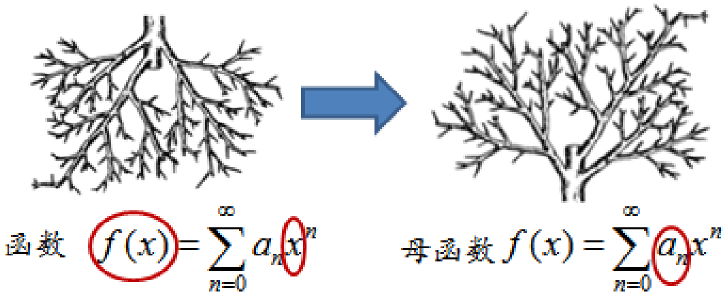


图 3. 正看是根逆是树

3. **将经典数学知识与高新的计算机科学技术前沿相结合——“古树新花相衬映”**

母函数概念的提出可以追溯到 300 年前，如同一棵古树经过漫长的发展和积淀，其知识体系结构已经趋于完善，可以说是枝繁叶茂。但是由于母函数方法需要大量的多项式乘法运算，因此近百年来母函数方法仅仅局限在纯数学的讨论，一直停滞不前，而在实际应用中并无建树。

随着计算机科学技术的出现，其面向各个行业的应用已层出不穷，如同鲜艳的花朵般在各个领域大放异彩。但是其工程应用的发展又迫切需要理论工具的支持。只有组合算法的优化设计才能使计算机拥有计算的智慧。比如，在概率统计和密码学中常用到的整数拆分数的计算，如果采用暴力的枚举方法势必效率低下。而 200 多年前由欧拉提出的母函数方法却为计算机的程序设计提供了优美高效的解决策略。

与此同时计算机技术又使得繁复的多项式计算不再困难。这就使得在手工计算时代，受到母函数方法中繁多的多项式乘法运算的约束，直到二十世纪六十年代仍然无法有效地求解大于 200 的整数拆分数问题得以迎刃而解。但是计算技术的发展仍然存在瓶颈，当被拆分数达到 500 时就会出现超出计算机最大整数范围而导致结果的溢出。此时为了将整数拆分数的求解做进一步的推进，又需要新的算法的支持。

这说明，“古树”为“新花”的开放提供了营养；“新花”又为“古树”注入了新的生

命力。正所谓“古树新花相映衬”。

教学理念 《组合数学》是一门应用数学，讲好组合数学的应用是这门课的重要内容。**将经典的组合数学知识和现代计算机技术，特别是与其最新发展密切结合，就能即使“古树”，也使“新花”都能动态地向前不断推进。**

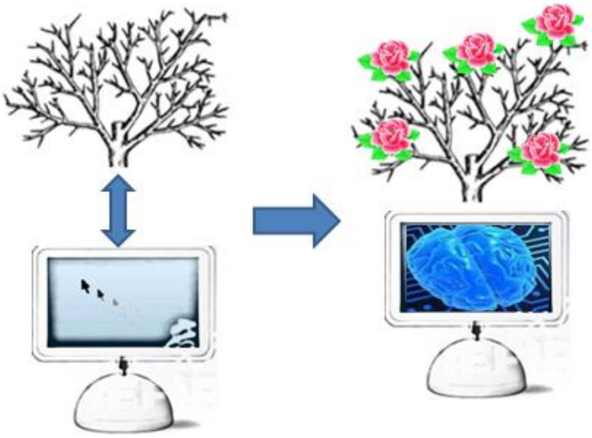


图 4. 古树新花相衬映

七、教学内容与设计

（20 分钟教学演示部分开始）

1、计数法则回顾　　　　　　问题的引出　　　　　　2 分钟

- 以两个色子投掷为例，对基本计数法则进行回顾。对应于不同的法则体现不同的计数策略：
  - 分类：加法法则
  - 分步：乘法法则

  思维层面： 通过简单问题的引入使学生进入思维活跃状态

  内容联系： 该内容虽然看似是对以往教学内容的回顾，但更重要的是基本计数法则是母函数方法可以有效计数的思想根源，后面的讲解中需要多次与之回应。

- 将问题引申到 300 年前伯努利对多个色子投掷的问题思考，使得基于基本计数法则的枚举求解过程完全失效。

  【提问】 **“请问同学们是否能解决 300 年前伯努利的困惑呢？”**

思维层面： 通过问题的复杂化使学生意识到已有知识遇到的瓶颈。

内容联系： 以问题的求解带动后续的内容

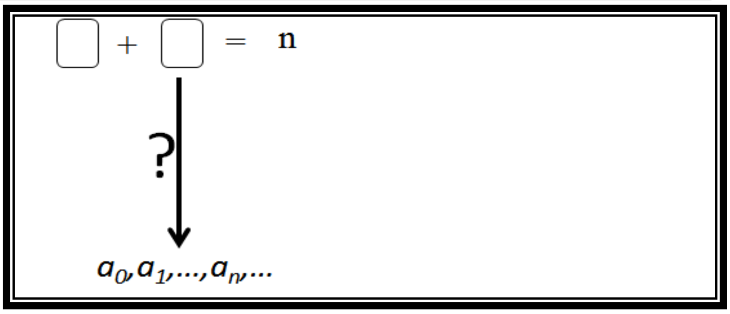
关键点： 基本计数法则的分步分类思想是计数的最基本要义，但是它们的直接应用却不足以求解复杂的计数问题。

2、 总结乘幂系数的特点　　　　　　引出母函数的概念　　　　　　　　5 分钟

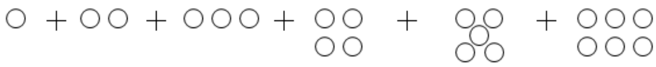
- 将问题再从多个色子归结到两个色子投掷的简单形式。

　　【提问】**“两个色子掷出 n 点，有多少种选法？”**

【板书】将问题画在黑板上，为后续问题的展开做铺垫

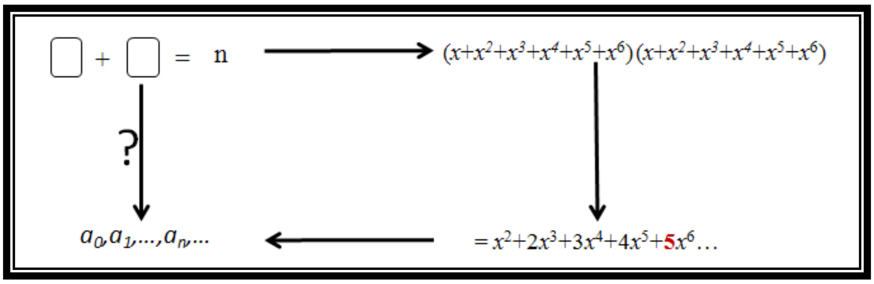


- 先关注一个色子的可能性，根据加法法则把“**或**”的分类关系表示为



- 如果用 x 来表示一个点，则两个点则可以用 x^2 来表示，其他点数依次类推。此时就可以用我们所熟悉的多项式来表示一个骰子可能出现的点数
  - 一个色子可能出现的点数对应的**多项式**：$x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6$
- 引申出两个色子投掷的问题
  - 两个色子的累加过程是个分步的过程
  - 根据乘法法则，两个色子所有的可能出现的点数可以表示为多项式：$(x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6)(x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6)$
- 分析多项式的乘法，幂级数的系数的计算对应利用基本计数法则计算时的分类过程
  - $x^1 \cdot x^5 + x^2 \cdot x^4 + x^3 \cdot x^3 + x^5 \cdot x^1 + x^4 \cdot x^2 = 5x^6$
- 对应的多项式相乘后展开式= $x^2+2x^3+3x^4+4x^5+\underline{\mathbf{5}}x^6\ldots$表示两个色子掷出 6 点的可能方法有 5 种 。
- 回答刚才的提问，原问题等价为求 $f(x)=(x+x^2+\ldots+x^6)^2$ 中 x^n 的系数.

【板书】 将多项式和展开式加入到板书中，形成了如下框图



思维层面：课程一开始给出的传统计数想法，其思路是对两个色子的情况同时考虑进行枚举，显然在多个色子的时候原来传统想法会遇到困难。如果分而治之，则每个色子的可能性都被完整地罗列出来，通过利用乘法法则又将每个色子的情况集成在一起。随着思路的转变,原问题的形式发生了巨大变化,逐渐展现出来系数和计数序列之间的关系。

内容联系：通过两个色子的求解，形成了初步的求解框架，为后续的母函数概念的引入进行了铺垫。

- 回应伯努利提出的多个色子的问题：**“投掷 n 粒色子时，加起来点数总和等于 m 的可能方式的数目？ ”**
  - 根据上述的分析自然的可以引申出伯努利问题的答案就是 $(x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6)^n$ 的展开式中 x^m 项的**系数**
  - 由此形成一个观察：**乘幂的系数与计数有对应关系**

  思维层面：回应伯努利的思考，从而形成初步的概念，引领学生发现乘幂的系数和数列的对应关系。

- 引导分析更一般的形式，自主地引出母函数的定义

  设 $a_0, a_1, \ldots, a_n, \cdots$ 是一个数列，做形式幂级数：

  $$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + \ldots ,$$

  我们称 $f(x)$ 是数列 $a_0,a_1,\ldots,a_n,\ldots$ 的母函数（又称生成函数）。

- 介绍母函数定义的起源：1812 年，拉普拉斯在著作《概率的分析理论》的第一卷中系统地研究了母函数方法。分析母函数和函数的区别
  - 不考虑收敛性
  - 可不考虑实际上的数值
  - 形式幂级数(Formal power series)
- 引导学生去思考母函数和函数的形式上的相似性和本质的不同
  - 概括描述：**母函数“似函数，非函数”;**
  - 但又引导学生思考母函数不是函数，那它到底是什么呢？
  - 为什么函数的形式具有计数的能力呢？

【提问】**母函数似函数，非函数，那它是什么呢？**

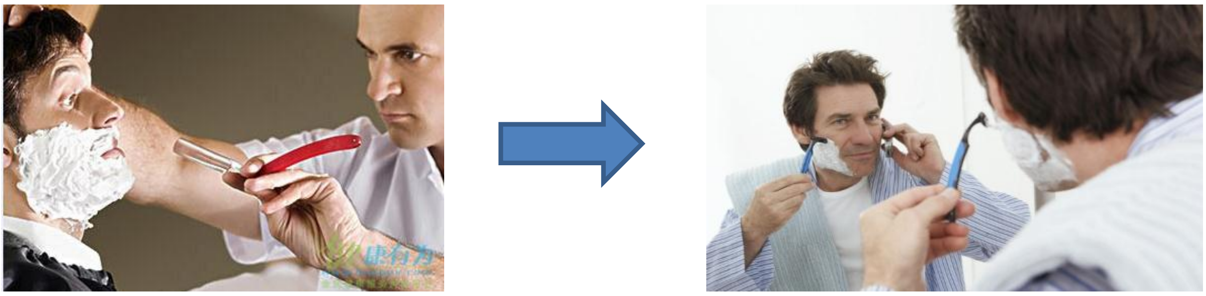
思维层面：已经由上述的色子投掷问题抽象出了一种序列和幂级数的对应关系，形成了学生们所熟悉的多项式形式。这样的定义是由教师引导学生从观察中自主思考得出的。这样的形式和函数一模一样，所以历史上由拉普拉斯在 1812 年提出，命名为母函数或生成函数。这样的形式和名称为学生留下了悬疑，如果说母函数，“似函数，非函数”，那它到底是什么呢?

内容联系： 母函数的定义是全章的核心，对它的定义的明确认识是后续内容的基础。

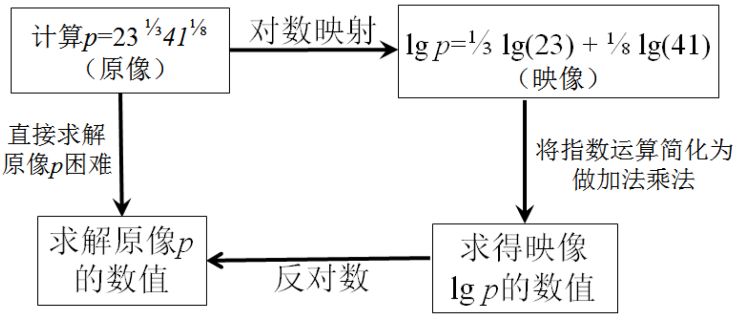
关键点： 通过一系列合情推理过程引出母函数的概念。

3、 总结母函数映射关系　　　　深入理解母函数的本质　　　　5 分钟

- 仔细观察母函数和对应的数列，寻找结构上的对应关系
  - 引导学生分析母函数名称中的“母”字，从函数的结构中分析母函数中蕴含着数列
  - **当数列的直接运算比较复杂时，通过给数列找到母函数，其计算就相对容易了。**
- 向学生们展示生活中的映射关系
  - 展示刮胡子的图片，启发同学思考借助映射关系，原来困难的事情就变得容易了。



- 数学中的映射关系
  - 引申出幂次乘法通过对数映射关系可以大大简化计算。



- 点明：“映射”就是两类数学对象之间建立的某种“对应关系”
  - 引导学生思考母函数定义与上述问题的相似性

【提问】<u>**母函数方法的求解过程是不是也是一种映射呢？**</u>

- 引导学生结合板书中的框图过程，看是否也符合映射的过程
  - 母函数的定义中，原像是数列，幂次的系数是映像
  - 多项式乘法中蕴含着计数法则的枚举过程

乘法法则:

$A(x)$中x取i次幂，且$B(x)$中取k-i次幂 $a_i x^i \times b_{k-i} x^{k-i} = a_i b_{k-i} x^k$

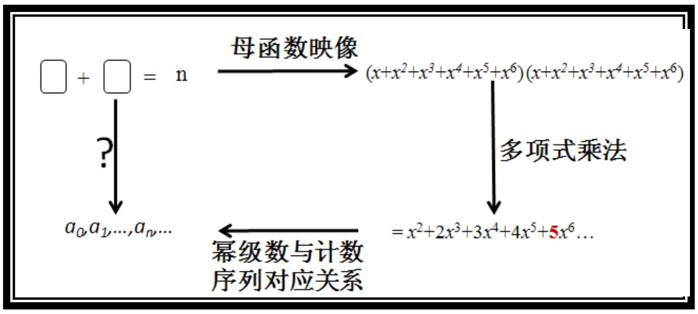
加法法则:

$C(x)$中x取k次幂对应于所有$0 \le i \le k$的可能取值 $c_k = \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}, k = 0,1,2.$

  - 当原像难于求解时，利用母函数与数列的映射关系，将数列嵌入到幂级数中，由于幂级数的运算在解析数学中有一系列的成熟手段，因此 $\{a_n\}$的结构问题也就便于分析计算了。<u>**母函数“似函数，非函数，是映射”**</u>。

【提问】设问来回答刚才的问题，<u>**母函数似函数，非函数，那它是什么呢？它是映射。**</u>

【板书】 将映射关系填充至框图中，形成了完整地映射关系



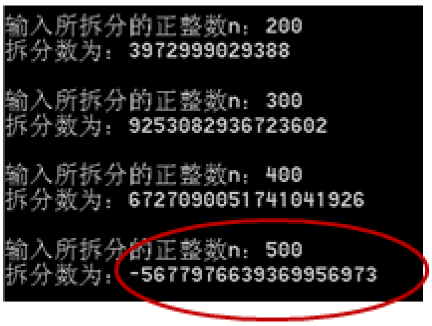
思维层面：通过与生活中和数学领域的映射关系的对比，分析得出母函数的定义的本质是映射。当原问题难于求解时，需要寻找相应的映射关系，要找到合适而有效的映射关系就是数学发现，是数学研究的重要思维方式。

内容联系：通过揭示母函数映射关系的本质，提升母函数定义中所隐含的方法论，引导学生更深刻地认识母函数的本质。

关键点： 通过对母函数定义的分析，深入探讨母函数的本质，“似函数，非函数，是映射”

4、介绍整数拆分数问题　　　　　　　母函数方法的应用　　　　　　　　　5 分钟

- 引申出整数拆分问题，回顾整数拆分的历史
  - 正整数无序拆分数 $p(n)$的定义及其应用
  - 介绍 18 世界 40 年代欧拉提出的母函数解法
  - 学术界曾经的困难：“自 1920 年天才数学家 Srinivasa Ramanujan 通过一些计数模式计算出 $p(200)$之后，在很长一段时间数学家认为整数拆分数的计算很难有大的突破了。 ”
  - 分析母函数方法的瓶颈在于多项式乘法手工计算的复杂性
- 介绍权威数论数据库 OEIS 组织，并介绍该问题发展相关的现状
  - 展示目前的可求的拆分数，$p(200)$, $p(300)$,…
  - 介绍组合算法在计算机的推动下的发展过程。从而引发对多项式乘法计算机编程实现的思考。
- 整数拆分数母函数方法的计算机实现
  - 通过动画的形式演示多项式乘法的计算机实现
  - **进行代码运行演示，发现溢出情况，并进行详细分析**



- ➢ 引出大数乘法的需求，并简要介绍大数乘法的实现方式

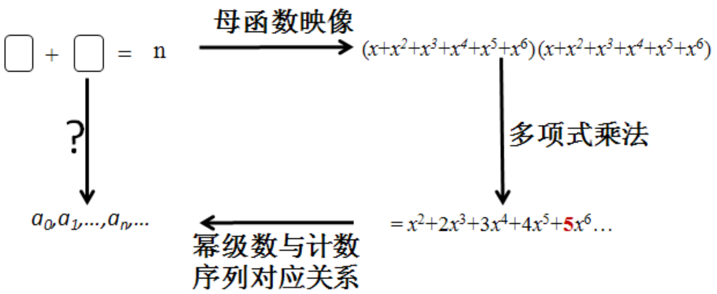
- 整数拆分数的前沿进展
  - ➢ 设问的形式引出问题“整数拆分数现在能算到多大？”
  - ➢ 最新的数据显示 $p(82352631)$：2012 年 6 月　求出的最大拆分数，其结果多达 10101 位
  - ➢ 整数划分相关的猜想：Swinnerton-Dyer conjecture. 数学界 7 大问题之一
  - ➢ **留给同学开放式的技术实现的空间，给出开放式的项目作业。**

【提问】<u>**请问在座的同学，你能计算出来最大的整数拆分数是多少呢？**</u>

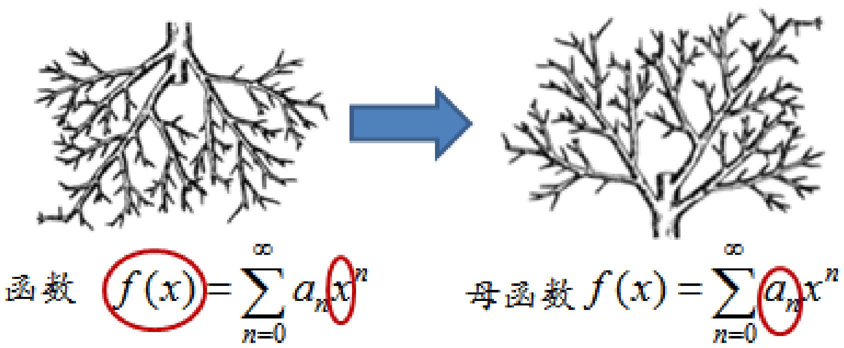
关键点：　通过对整数拆分数母函数方法的发展历程的回顾，结合现代计算机算法的实现和演示，充分揭示组合算法和计算机技术的相辅相成。

<u>4、前 20 分钟授课小结　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　3 分钟</u>

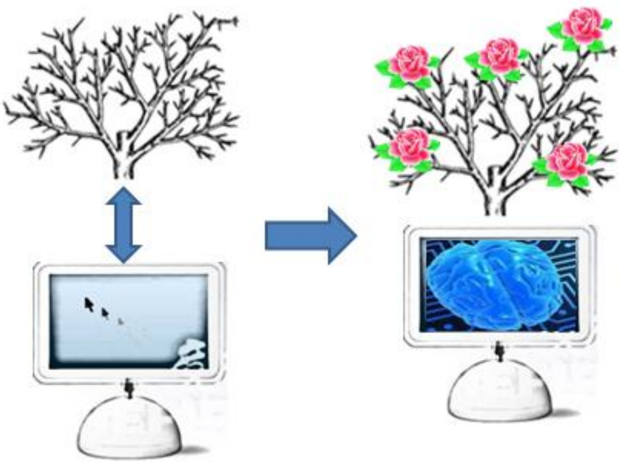
- 知识层面
  - ➢ 深刻揭示知识的本质---- 母函数“**似函数，非函数，是映射**”
  - ① 母函数的定义只有三行，但究其本质却包含了巧妙的数列到母函数的映射关系。通过将一个离散性的数列对象换成了一个在分析学上便于处理的解析对象，使得作为幂级数系数的数列$\{a_n\}$的结构问题也就便于分析计算了。所以母函数“似函数，非函数，是映射”。
  - ② 母函数定义的映射关系具有普遍适用性，对于分析问题和解决问题都有指导意义。恰当地使用数学方法对解决实际问题非常重要。



- 思维层面
  - ➢ 母函数的定义一改函数的意义，通过把视角进行了转移，突破了传统的思维定势，得到了意想不到的收获
  - ➢ 哲学启示：**“正看是根逆是树”，突破思维定势的发散思维是创新的有力武器！**



- 科学理念层面
  - 参赛教师通过分析整数拆分数的母函数方法的发展历程，向同学们展示将经典的组合数学知识和现代计算机技术，特别是与其最新发展密切结合所带来的巨大推动力，正所谓“**古树新花相衬映**”。



（20 分钟教学演示部分结束）

5、常见的形式幂级数　　　　　　　　母函数的更多形式　　　　　　　　　10 分钟

- 引导同学们思考以往所熟悉的形式幂级数

【提问】**除了多项式之外，同学们能想到什么样形式的母函数呢？**

- 二项式定理对应的母函数
  - 分析常用的二项式定理展开式

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2 + ... + \frac{n(n-1)...(n-k+1)}{k!}x^k + ...$$

  - 分析二项式定理中系数的意义
  - 通过二项式定理展开式的变形，分析系数的对应关系，证明如下组合等式

$$(1+x)^m(1+x)^n = (1+x)^{m+n}$$

$$\therefore \quad [C(n,0)+C(n,1)x+...+C(n,n)x^n]\times[C(m,0)+C(m,1)x^1+...+C(m,m)x^m]$$

$$= C(m+n,0)+C(m+n,1)x+...+C(m+n,m+n)x^{m+n}$$

比较等号两端项对应系数，可以得到一个等式

$$C(m+n,r) = C(m,0)C(n,r)+C(m,1)C(n,r-1) \quad +...+C(m,r)C(n,0)$$

思维层面：将母函数的定义更进一步的扩展，从学生所熟悉的二项式定理展开，由于母函数中所包含的系数对应关系，通过映射的关系实现了对组合等式的证明，进一步的表现了母函数映射关系的强大，以及映射关系作为一种科学方法具有普适性。

内容联系：进一步的扩展在映射关系下的不同操作。

- 泰勒展开式对应的母函数
  - 分析常用的泰勒展开式

$$(1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 + ... + (-1)^k x^k + ... \quad (1-x)^{-1} = 1 + x + x^2 + ...$$

$(1-ax)^{-1}=1+ax+a^2x^2+.....$

- ➢ 对多个展开式的加减运算

$$\frac{2-3x}{(1-x)(1-2x)}=\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1-2x}=\sum_{k=0}^{\infty}x^k+\sum_{k=0}^{\infty}2^kx^k \quad =\sum_{k=0}^{\infty}(1+2^k)x^k$$

- ➢ 引出部分分式分解和母函数运算的关系

母函数　　　　　　　　　　　　　　　　数字序列

$$\frac{2-3x}{(1-x)(1-2x)} \xleftrightarrow[(1-ax)^{-1}=1+ax+a^2x^2+.....]{\text{部分分式分解}} f(k)=2^k+1$$

思维层面：通过对多个泰勒展开式的研究，初步探究了多个母函数对应的加减，发现母函数的加减运算后会生成新的数列和多项式的对应关系。将映射关系中的运算进一步变化为多项式的加法运算。

内容联系：上述若干母函数形式是后续章节中最常用的母函数形式，由于通过部分分式分解可以有效地得到数字序列的变换，因此在后续的内容中将会多次用到。

【提问】<u>**母函数既然和函数有着相同的结构，那是否也可以有运算的功能呢？**</u>

关键点：从学生们熟悉的函数形式出发，联想其对应的母函数形式，通过不同形式的运算深刻领会母函数的映射关系。

<u>**6、母函数的性质　　　　　　　函数运算的进一步引申　　　　　　　　　　15 分钟**</u>

- 通过类比函数运算，考察母函数相应的运算的可行性和合理的表达方式
  - ➢ 性质 1. 基本运算
    - ➢ 引导学生思考，在函数中最基本的运算就是四则运算了，对应到母函数中，是系数进行相应的运算。

(a)　　$A(x)=B(x)$　　$iff \quad a_i=b_i, i=1,2,...$

(b)　　若　$A(x)+B(x)=c_0+c_1x+c_2x^2+...+...$

则　　$c_i=a_i+b_i,\qquad i=0,1,2,3,.....$

  - ➢ 性质 2. 移位运算
    - ➢ 引导学生在考虑数列时，常会抽取部分数列。

若　$b_k=\begin{cases}0 & k<l \\ a_{k-l} & k\ge l\end{cases}$　则　$B(x)=x^lA(x)$

通过系数的对应关系给予证明：

$$\begin{aligned}B(x)&=0+0+\cdots+0+b_lx^l+b_{l+1}x^{l+1}+\cdots\\&=a_0x^l+a_1x^{l+1}+\cdots\\&=x^lA(x)\end{aligned}$$

【提问】<u>**如果直接把数列进行移位呢？**</u>

若　$b_k=a_{k+l}$ 则 $B(x)=[A(x)-\sum_{k=0}^{l-1}a_kx^k]/x^l$

给予证明

$$\because \quad B(x)=b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots$$

$$\begin{aligned}\therefore \quad B(x)&=a_l+a_{l+1}x+a_{l+2}x^2+\cdots\\&=\frac{1}{x^l}(a_lx^l+a_{l+1}x^{l+1}+a_{l+2}x^{l+2}+\cdots)\\&=[A(x)-a_0-a_1x-a_2x^2-\cdots-a_{l-1}x^{l-1}]/x^l\\&=[A(x)-\sum_{k=0}^{l-1}a_kx^k]/x^l\end{aligned}$$

【观察】总结上述的运算会发现，母函数由于是系数的对应关系，其结果并不能直接套用函数的运算结果。但是反过来思考，是不是所有的函数运算在母函数上都有意义呢？

【提问】**既然母函数具有函数的形式，那函数的运算是否就能放到母函数身上呢？比如求导？**

- 性质 3. 求导运算
  - 引导学生先考虑一般多项式的求导

    $A(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3\ldots,$

    那么求导的结果即

    $A'(x)=a_1+2a_2x+3a_3x^2\ldots,$

【提问】**通过对应关系的比较，如何才能把序号对应起来呢？**

$$A(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3\ldots, \Longrightarrow A'(x)=a_1+2a_2x+3a_3x^2\ldots,$$

通项：$ka_k\,x^{k-1}$

幂次相对应 $\Downarrow$

$$B(x)=b_0+b_1x+b_2x^2+b_3x^3\ldots, \Longrightarrow xA'(x)=a_1x+2a_2x^2+3a_3x^3\ldots,$$

通项：$ka_k\,x^k$

通过推理得到如下的结论

若 $b_k=ka_k$ 则 $B(x)=xA'(x)$

- 性质 4. 积分运算

【提问】**利用幂次系数相对应的规则，是不是也可以来分析母函数的积分呢？**

作为课后作业留给大家练习证明如下结论：

若 $b_k=\dfrac{a_k}{1+k}$ 则 $B(x)=\dfrac{1}{x}\int_0^x A(x)dx$

关键点：联系函数的多种运算，找到母函数对应的运算性质，转换思路，以幂次系数相对应的关系进行运算。

7、50 分钟教学内容总结　　5 分钟

- 母函数的定义
  - 母函数的定义突破了传统函数的视角，利用幂级数运算来实现有效的计数，是映射

关系的完美演绎。

- 计算整数拆分数的母函数方法
  - 整数拆分数的求解需要借助强大的数学工具。而母函数方法由于受到多项式乘法手工计算的约束而无法得到有效的求解。计算机出现后，计算能力的瓶颈得到了很好的解决，但也随着拆分数的增大而出现了新的瓶颈，因此又需要新的算法不断的推进整数拆分数的发展。
- 母函数的性质
  - 母函数借用了函数的解析形式，因此也具备运算的能力。通过与函数运算的类比，进一步地深化母函数映射关系的应用。

【后 25 分钟课程的作业】 请同学们证明母函数的积分性质：

$$\text{若}\quad b_k = \frac{a_k}{1+k} \quad \text{则} \quad B(x) = \frac{1}{x}\int_0^x A(x)dx$$